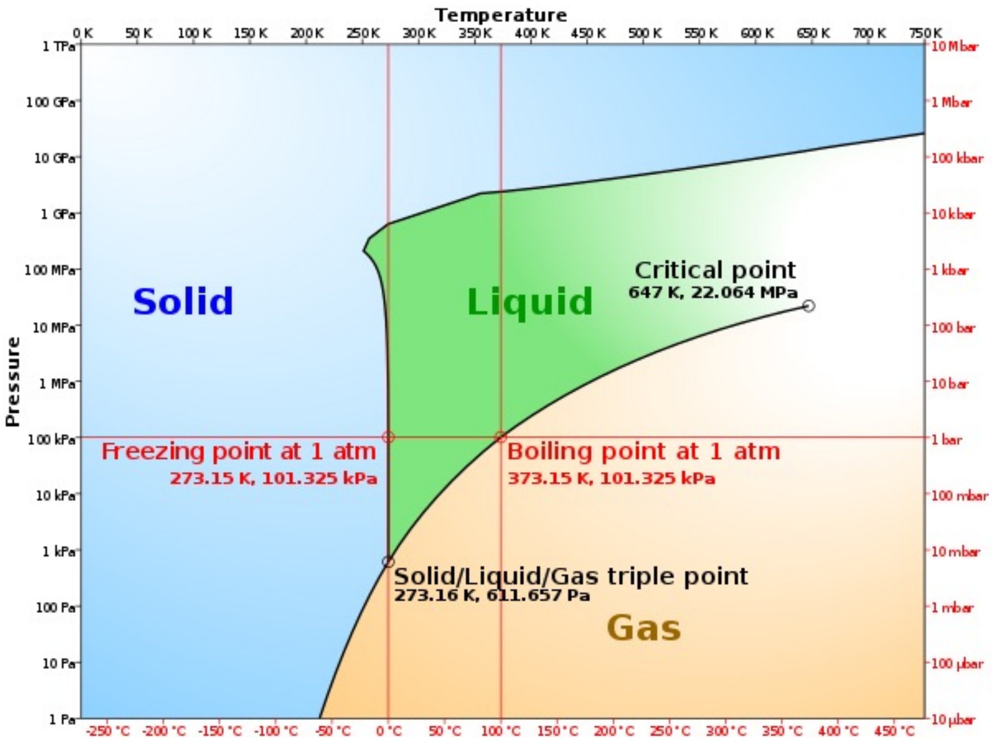
Pierre Pujol
Laboratoire de Physique Théorique
Université Paul Sabatier, Toulouse

Encuentros en el camino a la clasificación de los estados de la materia: complejidad, universalidad, álgebra y topología…

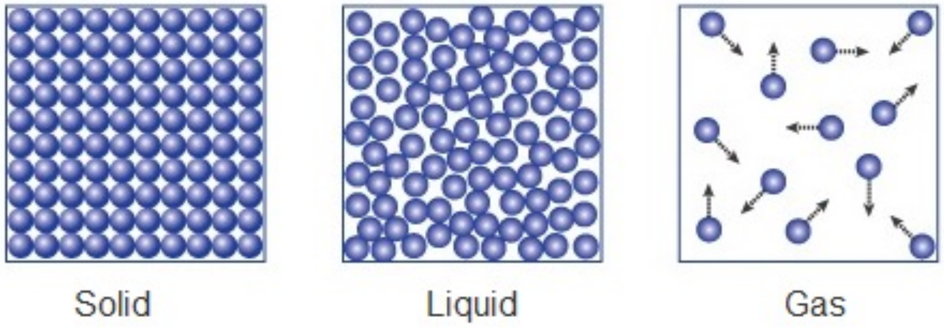
Plano de la presentación:

- Clasificación de las fases (los estados) de la materia y transiciones de fase
- Invariancia de escala en las transiciones de fase
- Invariancia de escala en 2-D, lo que nos dice el álgebra
- Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología
- Texturas topológicas
- Estados topológicos de la materia
- Conclusión y comentarios finales

Clasificación de las fases (los estados) de la materia y transiciones de fase



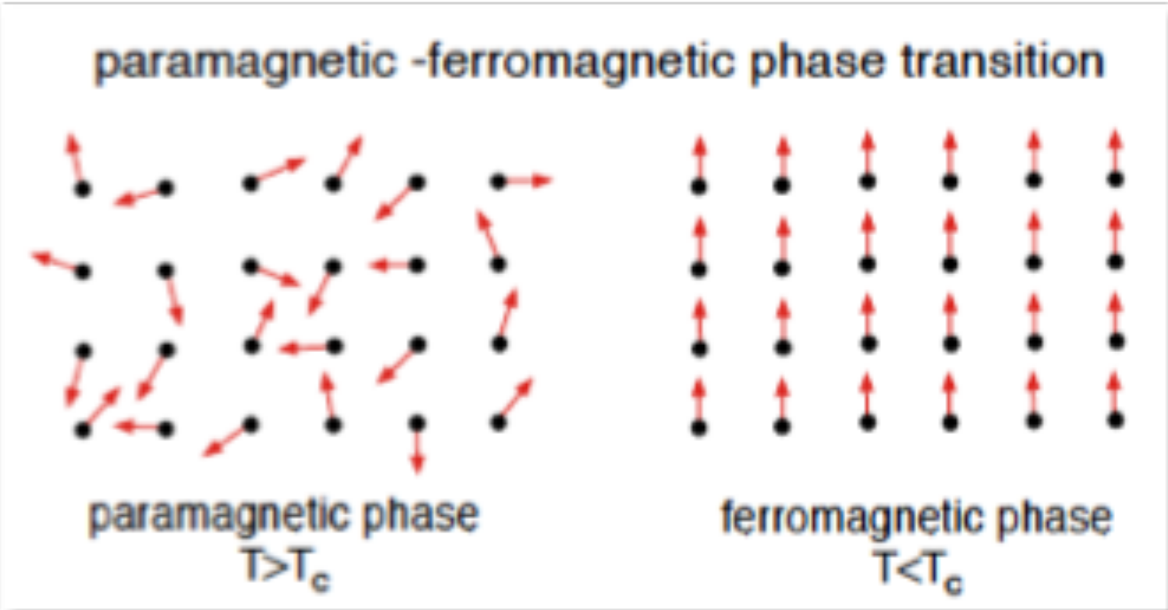
Clasificación de las fases (los estados) de la materia y transiciones de fase

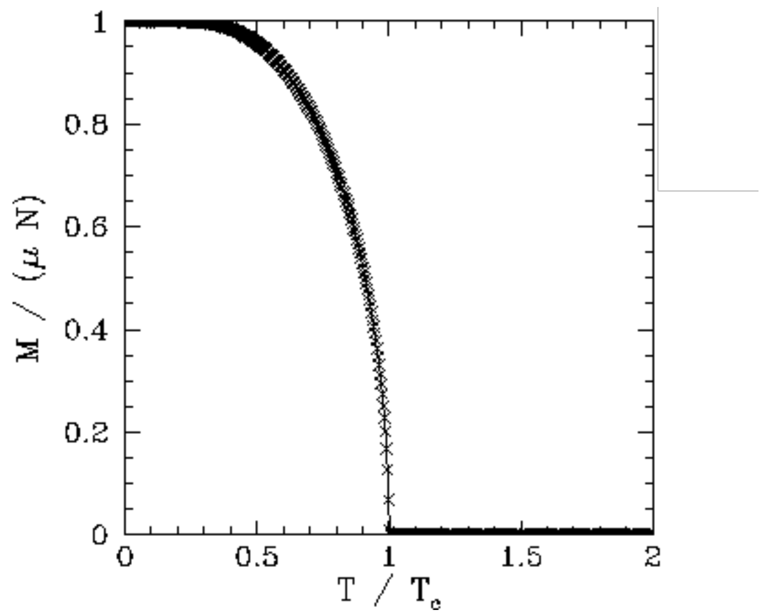


© The University of Waikato Te Whare Wānanga o Waikato | www.sciencelearn.org.nz

- Fenómeno colectivo
- Se distinguen las fases por la simetrías (aquí de traslación)

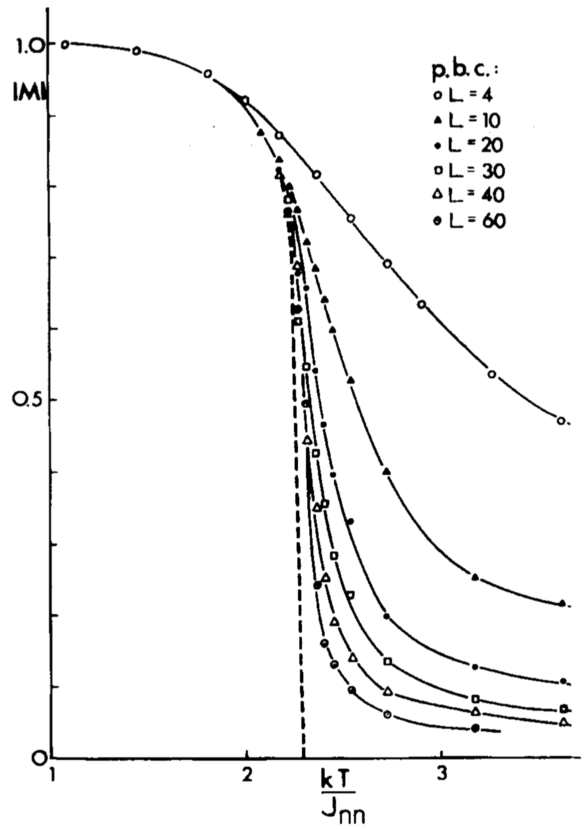
El ejemplo del magnetismo





El ejemplo del magnetismo

El límite termodinámico



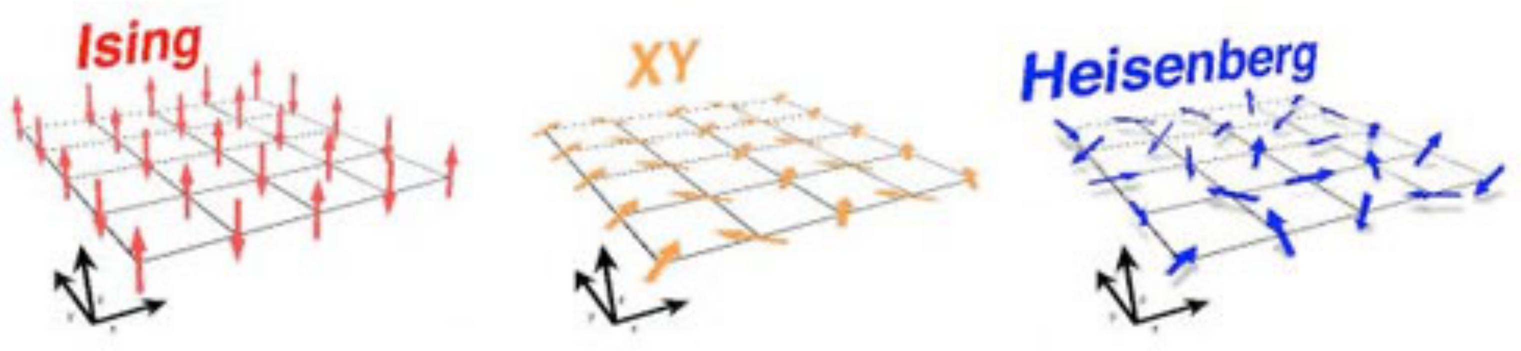
UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER Université de Toulouse

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

LPT LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE TOULOUSE

El ejemplo del magnetismo

Los grupos de simetría y la(s) ruptura(s) de simetría



Z_2 $\qquad$ SO(2) $\qquad$ SO(3)

En punto crítico (de transición): invariancia de escala

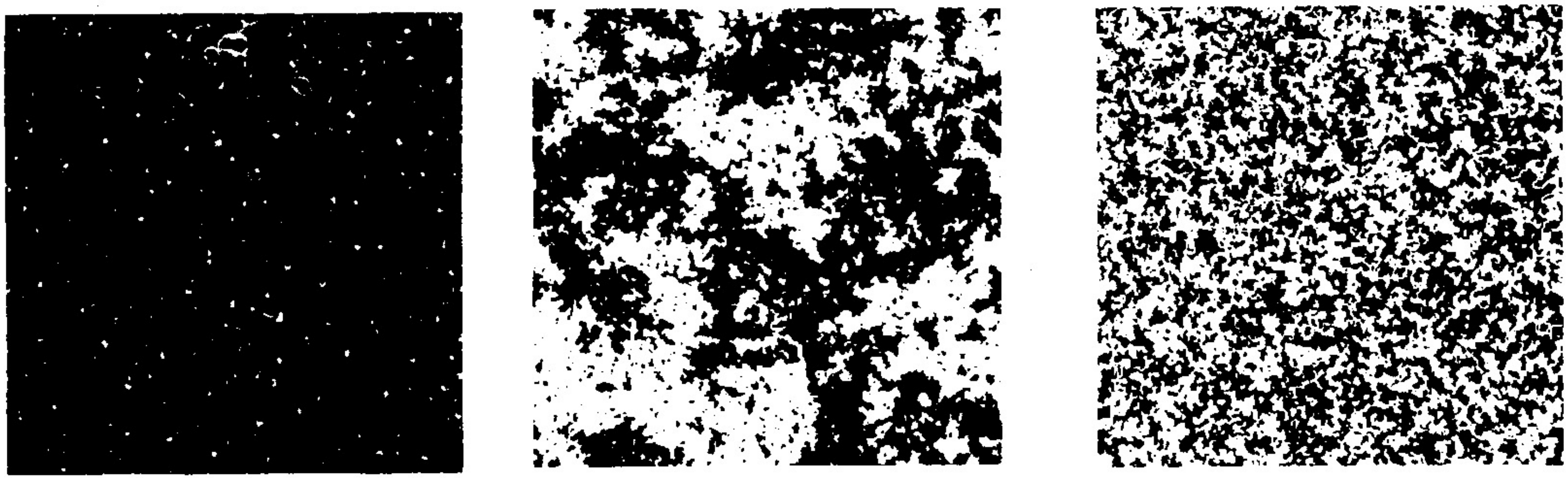
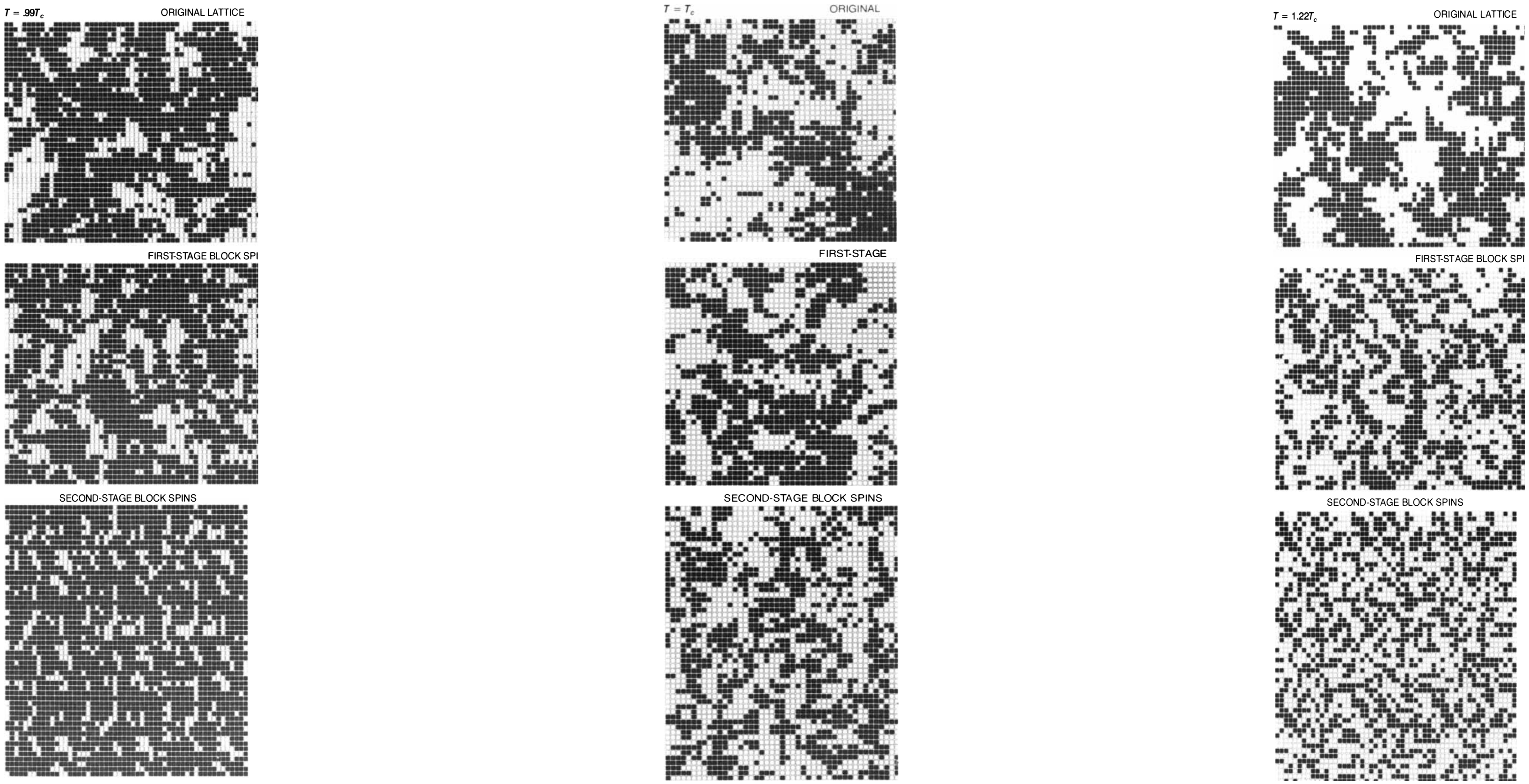


Fig. 4.1 Typical spin configurations for the two-dimensional Ising square lattice: (left) $T \ll T_c$; (center) $T \sim T_c$; (right) $T \gg T_c$.

En punto crítico (de transición): invariancia de escala

El grupo de renormalización y universalidad (Wilson ~ 1970)



En punto crítico (de transición): invariancia de escala

El grupo de renormalización y universalidad (Wilson ~ 1970)

Magnetization: $M(T) \sim |t|^{\beta}$

Magnetic Susceptibility: $\chi(T) \sim |t|^{-\gamma}$ $\qquad |t| = |(T-T_c)/T_c|$

Correlation Length: $\xi(T) \sim |t|^{-\nu}$

Specific Heat (zero-field): $C(T) \sim |t|^{-\alpha}$

En punto crítico (de transición): invariancia de escala

El grupo de renormalización y universalidad (Wilson ~ 1970)

Magnetization: $M(T) \sim |t|^{\beta}$

Magnetic Susceptibility: $\chi(T) \sim |t|^{-\gamma}$ $|t| = |(T-T_c)/T_c|$

Correlation Length: $\xi(T) \sim |t|^{-\nu}$

Specific Heat (zero-field): $C(T) \sim |t|^{-\alpha}$

Las funciones de correlación a 2 y tres puntos (Polyakov 1970)

$$\langle \Phi_a(\vec{x}) \Phi_b(\vec{y}) \rangle = \frac{\delta_{a,b}}{|\vec{x}-\vec{y}|^{\Delta_a+\Delta_b}}$$

$$\langle \Phi_a(\vec{x}) \Phi_b(\vec{y}) \Phi_c(\vec{z}) \rangle = \frac{C}{|\vec{x}-\vec{y}|^{\Delta_a+\Delta_b-\Delta_c} |\vec{x}-\vec{z}|^{\Delta_a+\Delta_c-\Delta_b} |\vec{z}-\vec{y}|^{\Delta_c+\Delta_b-\Delta_a}}$$

En punto crítico (de transición): invariancia de escala

El grupo de renormalización y universalidad (Wilson ~ 1970)

Los puntos críticos correspondientes a una misma clase de universalidad representados por una única teoría de campos invariante de escala

Invariancia de escala en 2-D, lo que nos dice el álgebra

La invariancia de escala, rotación y traslación en una teoría de campos local $\Longrightarrow$ invariancia bajo **todas** las transformaciones conformes

$$z = x+iy \;\; ; \;\; z \to f(z)$$

Invariancia de escala en 2-D, lo que nos dice el álgebra

La invariancia de escala, rotación y traslación en una teoría de campos local ➡ invariancia bajo **todas** las transformaciones conformes

$$z = x + iy \ ; \ z \to f(z)$$

➡ Una infinidad de simetrías
Se estudia el álgebra de los generadores de esas simetrías

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$ Algebra de Virasoro

Invariancia de escala en 2-D, lo que nos dice el álgebra

La invariancia de escala, rotación y traslación en una teoría de campos local $\Rightarrow$ invariancia bajo **todas** las transformaciones conformes

$$\mathrm{z} = \mathrm{x}+\mathrm{iy} \;\; ; \;\; \mathrm{z} \to f(z)$$

Una infinidad de simetrías
Se estudia el álgebra de los generadores de esas simetrías

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$ Algebra de Virasoro

Se estudia las representaciones del álgebra
(Belavin, Polkyakov, Zamolodchikov 1984)

Invariancia de escala en 2-D, lo que nos dice el álgebra

$$
\begin{array}{c|ccc}
2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & 0 \\
1 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & 1 & 2 & 3
\end{array}
$$

$$c_{4,3} = \frac{1}{2}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\
2 & \frac{7}{16} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{7}{16} \\
1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

$$c_{5,4} = \frac{7}{10}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
4 & 3 & \frac{13}{8} & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 0 \\
3 & \frac{7}{5} & \frac{21}{40} & \frac{1}{15} & \frac{1}{40} & \frac{2}{5} \\
2 & \frac{2}{5} & \frac{1}{40} & \frac{1}{15} & \frac{21}{40} & \frac{7}{5} \\
1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{3} & \frac{13}{8} & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
$$

$$c_{6,5} = \frac{4}{5}$$

Modelo de Ising, Ising tri-crítico, Potts a 3 estados, etc...

Para varios de esos modelos no se conoce el lagrangiano de la teoría de campos correspondiente, pero se pueden calcular exactamente las funciones de correlación !

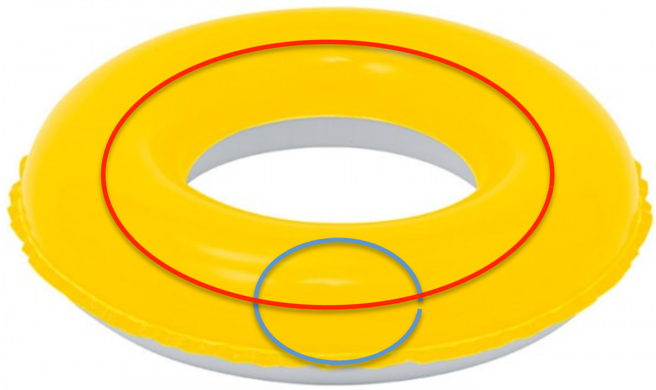
Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología

La **topología** (del griego τόπος, 'lugar', y λόγος, 'estudio') es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.[1] Es una disciplina que estudia las propiedades de los

En topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Han de tener el mismo número de *trozos*, *huecos*, *intersecciones*, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo

Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología

Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología



UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER Université de Toulouse

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics LA-CoNGA physics

LPT LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE TOULOUSE

Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología

- Euler Characteristic : $$\chi = \int_M \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi} K$$

- For a closed manifold : $$\chi = 2(1-g) \in \mathbb{Z}$$

$g = 0$

$\chi = 2$

$g = 1$

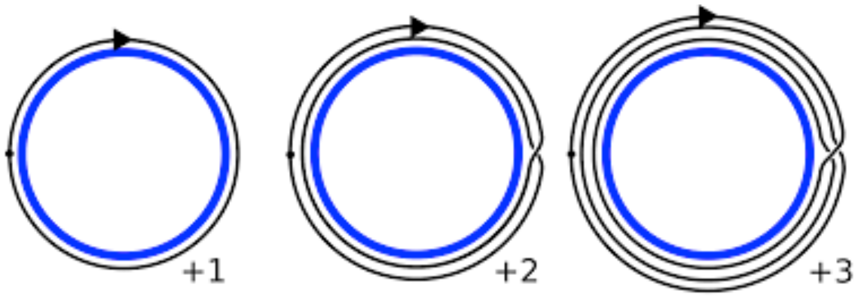
$\chi = 0$

$g = 2$

$\chi = -2$

Homotopy groups :

$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$



$$t \in [0,1] \;;\; \vec{r}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \;\;;\; \vec{r}(0) = \vec{r}(1)$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dt \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

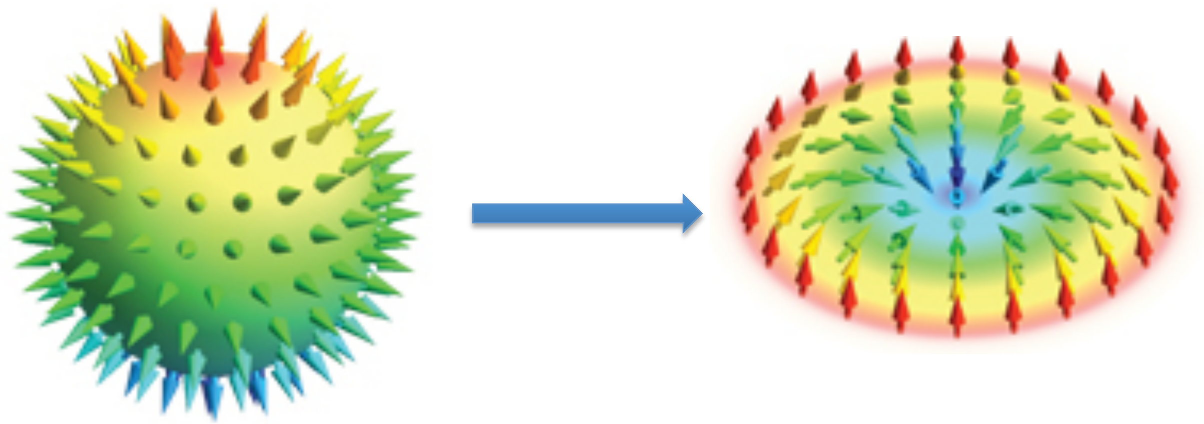
UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER Université de Toulouse

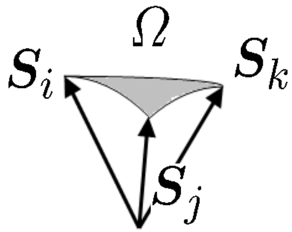
Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

LPT LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE TOULOUSE

Nuevo paradigma: lo que nos dice la topología

$$\Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$



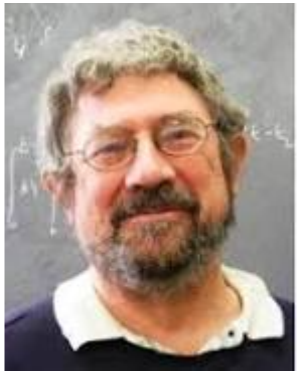


$$n = \frac{1}{4\pi}\int dxdy\ \vec{M}.\left(\partial_x \vec{M} \times \partial_y \vec{M}\right)$$

Fases o transiciones de fases caracterizadas por la topología

Premio Nobel de Física 2016

David J. Thouless



J. Michael Kosterlitz

F. Duncan M. Haldane

UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Texturas topológicas

J. Phys. C: Solid State Phys., Vol. 5, 1972. Printed in Great Britain. © 1972

Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids

J M KOSTERLITZ and D J THOULESS
Department of Mathematical Physics, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT

J. Phys. C: Solid State Phys., Vol. 6, 1973. Printed in Great Britain. © 1973

Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems

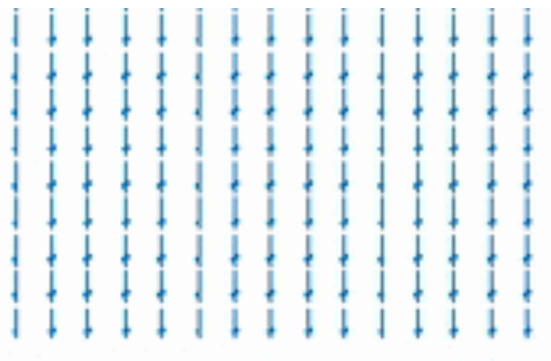
J M Kosterlitz and D J Thouless
Department of Mathematical Physics, University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Texturas topológicas

XY model:



$$\vec{S}_i = S\left(\cos(\theta_i)\ ,\sin(\theta_i)\right)$$

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\vec{S}_i.\vec{S}_j$$

Thin superfluid films:

$$\psi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})}$$

$$\frac{F}{T} \sim \frac{K}{2}\int d^2\vec{r}\ |\nabla\theta|^2 + \ldots\ ;\ K \propto \frac{\rho^2}{T}$$

Quasi-long-range order at low temperatures:

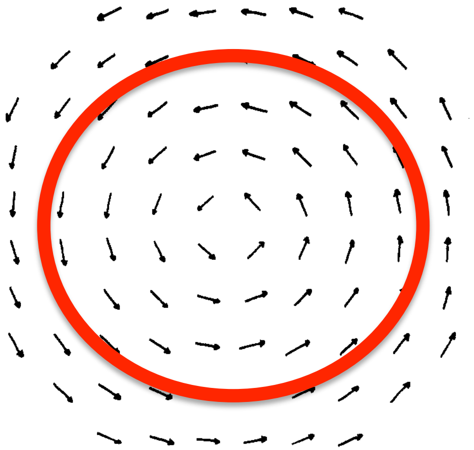
$$\langle \vec{S}_i . \vec{S}_j \rangle \sim \frac{C}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\alpha}}$$

Varies continuously with T

$$\langle \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r'})\rangle \sim \frac{C}{|\vec{r} - \vec{r'}|^{\alpha}}$$

Texturas topológicas

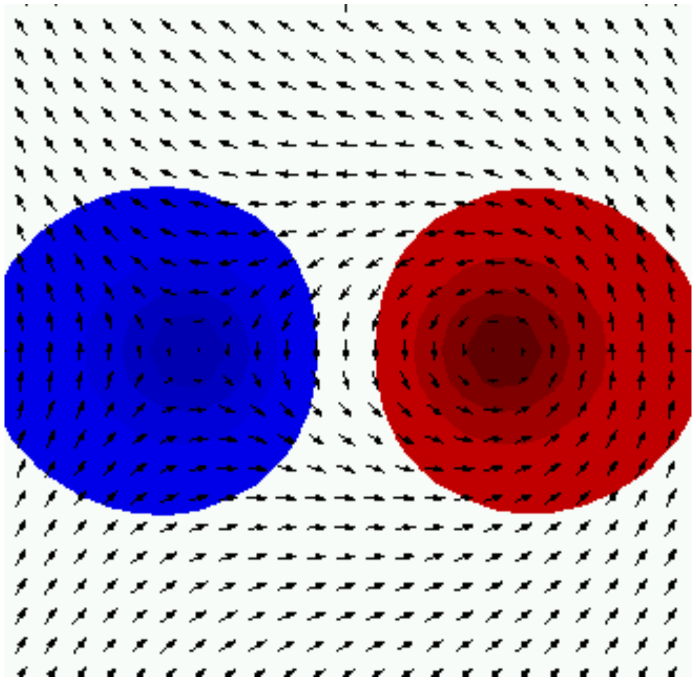
But, at higher temperatures, vortices appear:



$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dt\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Texturas topológicas



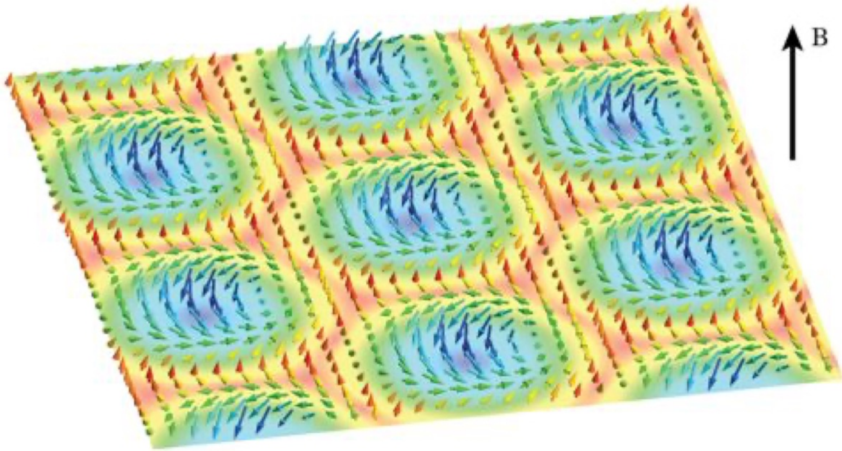
Above $T_c = T_{BKT}$:

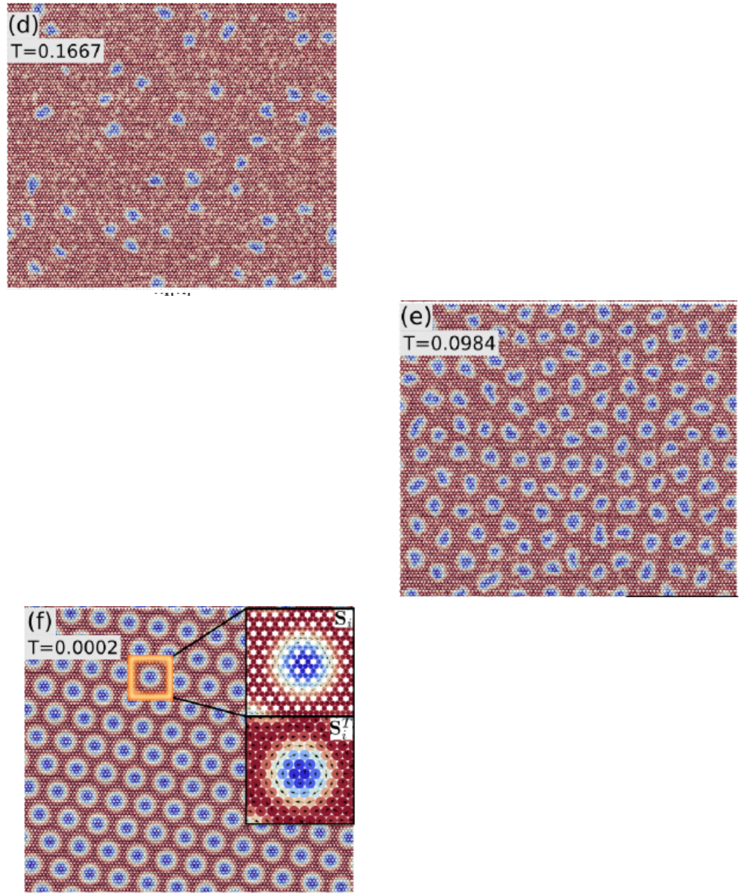
$$\langle \vec{S}_i . \vec{S}_j \rangle \sim e^{\frac{-|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{\xi}}$$

$$\langle \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r'}) \rangle \sim e^{\frac{-|\vec{r} - \vec{r'}|}{\xi}}$$

Texturas topológicas

Skyrmions



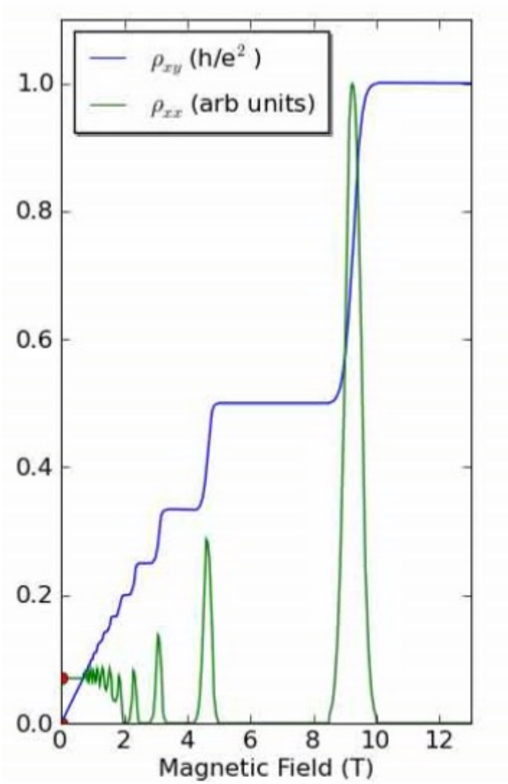


Con F. Gómez-Albarracín, L. Jaubert y D. Rosales

Estados topológicos de la materia

Topology in physics:

Quantum Hall Effect:



$$\sigma_{xx} = 0$$

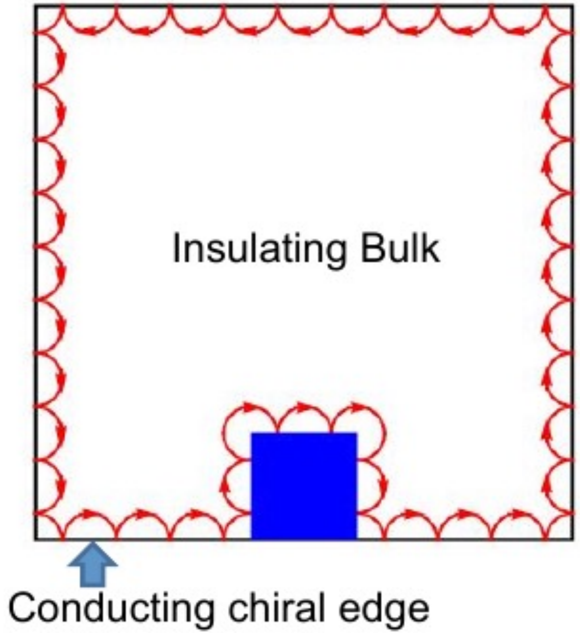
➡ It is an insulator

$$\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_y} = \frac{ne^2}{h}$$

➡ Hall conductivity is quantized

Estados topológicos de la materia

Conducting chiral edge



$$\sigma_{xy} = \frac{ne^2}{h}$$

n= # of channels

Edge states are stable against impurities

Estados topológicos de la materia

$$u_{k_1 k_2} = \psi_{k_1 k_2} \exp(-ik_1 x - ik_2 y)$$

$$\hat{H}(k_1, k_2) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \hbar k_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \hbar k_2 - eBx\right)^2 + U(x, y).$$

And from Kubo formula

$$\sigma_H = \frac{ie^2}{2\pi h}\sum\int d^2k\int d^2r\left(\frac{\partial u^*}{\partial k_1}\frac{\partial u}{\partial k_2} - \frac{\partial u^*}{\partial k_2}\frac{\partial u}{\partial k_1}\right)$$

$$= \frac{ie^2}{4\pi h}\sum\oint dk_j\int d^2r\left(u^*\frac{\partial u}{\partial k_j} - \frac{\partial u^*}{\partial k_j}u\right),$$

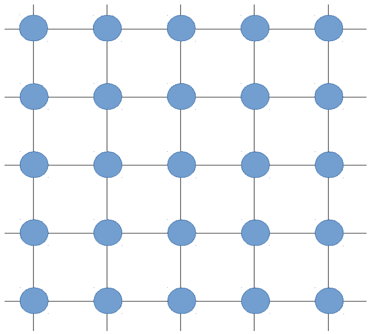
$$\rightarrow \quad \frac{e^2}{2\pi h}\oint dk\left(\frac{d\theta}{dk}\right)$$

UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER Université de Toulouse

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics LA-CoNGA physics

LPT LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE TOULOUSE

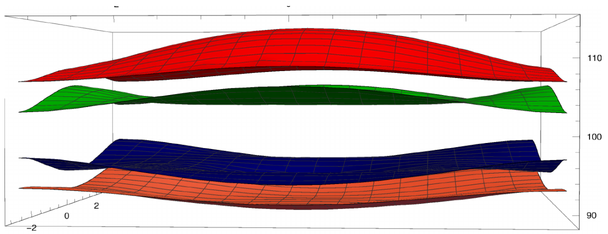
Estados topológicos de la materia
Aislantes topológicos



$$\mathcal{H} = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} c^{\dagger}_{i,\alpha} H_{\alpha,\beta} c_{j,\beta}$$

$$H_k = e^{-i\mathbf{k}.\hat{\mathbf{r}}} \mathcal{H} e^{i\mathbf{k}.\hat{\mathbf{r}}}$$

Diagonalization : $|u_{k_x,k_y,n}\rangle$



Berry Curvature in momentum space

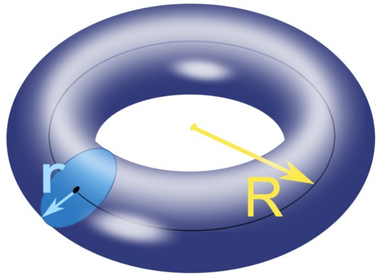
$$\mathcal{F}(\mathbf{k}) = i\epsilon_{ij} \langle \partial_{k_i} u(\mathbf{k}) | \partial_{k_j} u(\mathbf{k}) \rangle$$

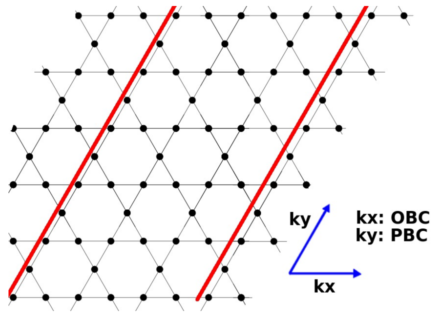
First Chern number

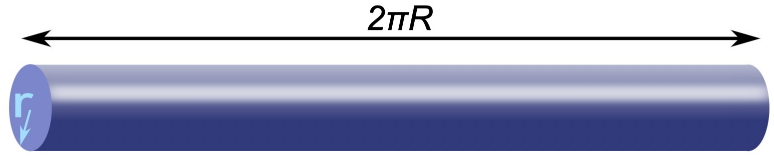
$$C = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi} \mathcal{F}(\mathbf{k})$$

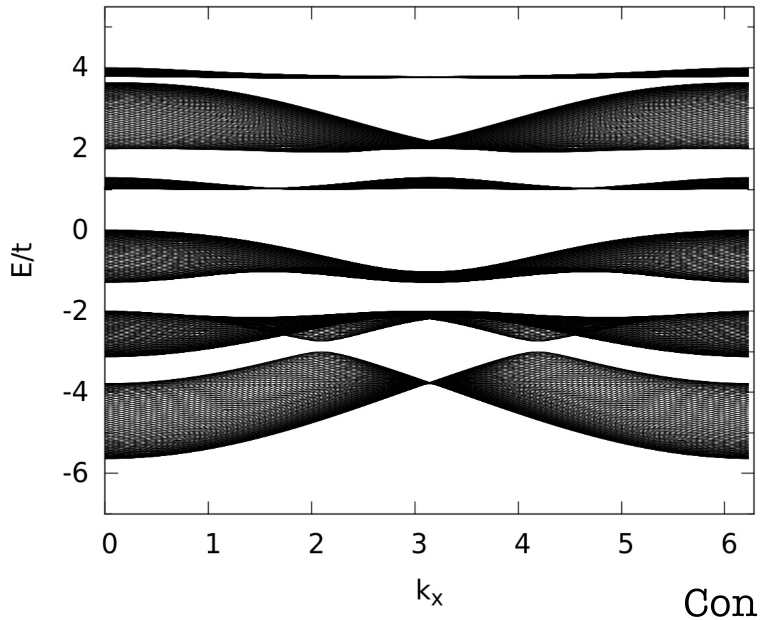
Fully filled band $\quad C \in \mathbb{Z}$

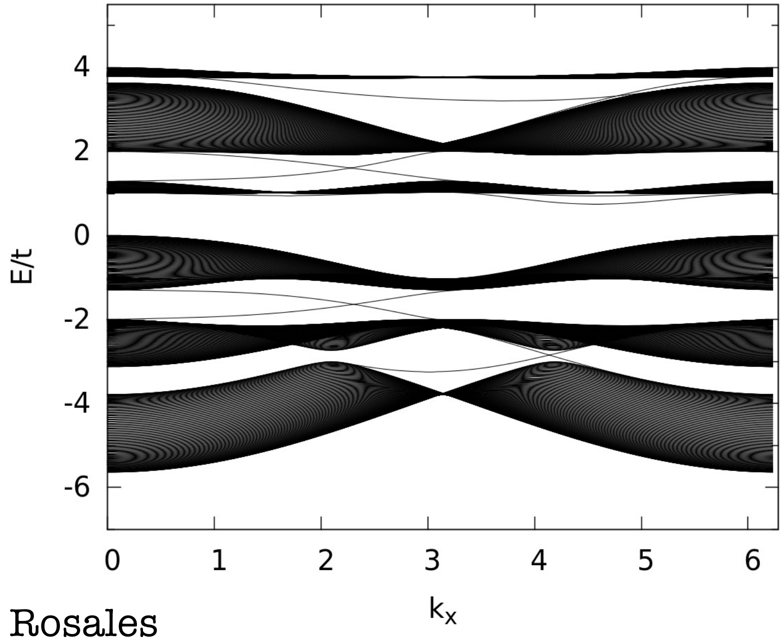
Estados topológicos de la materia
Aislantes topológicos











Con F. Gómez-Albarracín y D. Rosales

Estados topológicos de la materia
Aislantes topológicos

No existe ninguna cantidad local (o parámetro de orden local) que permita distinguir entre un aislante "trivial" y un aislante topológico

comentarios finales

- ~1940-50: descripción de Ginzburg-Landau de los estados mas conocidos de la materia y de las transiciones → se estudian con parámetros de orden locales + construcción algebraica.

- ~1980-?: descripción de los estados topológicos de la materia y de sus transiciones → se estudian con una construcción topológica.

- …Y no se habló de los problemas de dinámica :
  - Estados fuera de equilibrio, vidrios
  - Sistemas dinámicos sin energía libre → la complejidad emerge exclusivamente de la dinámica