

Proyecto de pasantía
Análisis de estabilidad de interfases en desplazamiento bifásico

Autor: Diego Orozco
Tutor: Ernesto Medina
Instituciones de cooperación: USB, UIS, USFQ

6 de diciembre de 2022



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE LOS ANDES



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
INGENIERÍA

UNMSM



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Université
de Paris

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN



CLARA

DBACCESS

frontier x
ANALYTICS





1. Introducción
2. Objetivos y metodología
3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw
4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics
5. Conclusiones y perspectivas



1. Introducción

1.1 Planteamiento del problema

1.2 Estado del arte

2. Objetivos y metodología

3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw

4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics

5. Conclusiones y perspectivas



Planteamiento del problema

Injectar agua en un yacimiento de hidrocarburos, la eficiencia disminuye si se produce **adedamiento viscoso**.

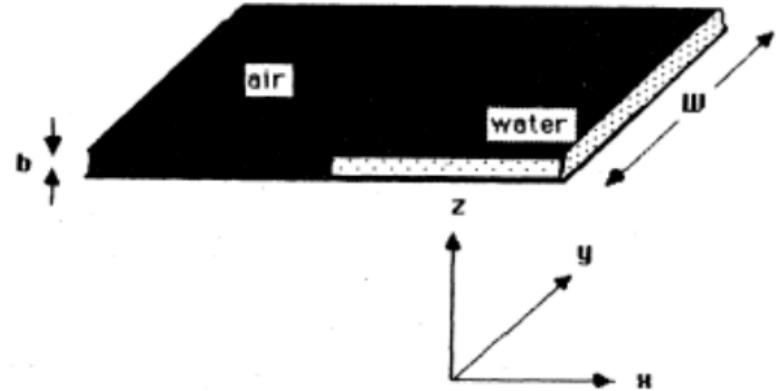
- ▶ Puede ocurrir cuando un fluido desplaza a otro de mayor viscosidad.

¿Puede evitarse el adedamiento?

Viscosificar el agua no es rentable

- ▶ Para modelar lo que ocurre, se considera una **celda Hele-Shaw** con dos fluidos inmiscibles.

¿Puede deducirse algún criterio de estabilidad?



Bensimon, D., *et al.*, Rev. Mod. Phys, 1986.

- ▶ b : separación entre las placas (profundidad de la celda)
- ▶ W : separación entre las paredes laterales (ancho de la celda)
- ▶ Condición: $b \ll W$



Inyectar agua en un yacimiento de hidrocarburos, la eficiencia disminuye si se produce **adedamiento viscoso**.

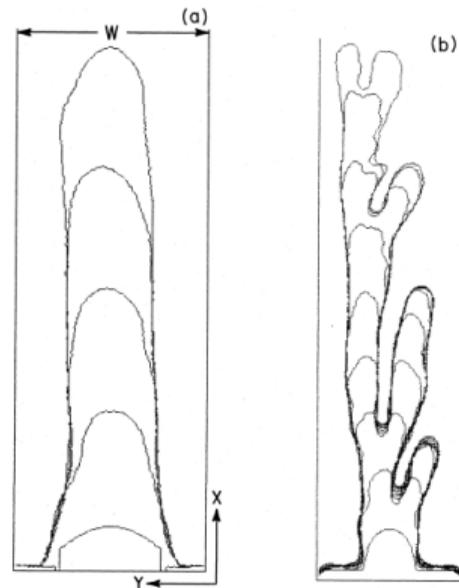
- ▶ Puede ocurrir cuando un fluido desplaza a otro de mayor viscosidad.

¿Puede evitarse el adedamiento?

Viscosificar el agua no es rentable

- ▶ Para modelar lo que ocurre, se considera una **celda Hele-Shaw** con dos fluidos inmiscibles.

¿Puede deducirse algún criterio de estabilidad?



Adedamiento: un dedo (izq.) y ramificado (der.).
Bensimon, D., *et al.*, Rev. Mod. Phys, 1986.



Criterios de estabilidad se han obtenido para distintas geometrías de celda

► Profundidad constante

Bensimon, D., *et al.*, Rev. Mod. Phys., 1986.

Parámetro adimensional con valor crítico

León, D., Trabajo de titulación, UITEY, 2021.

Análisis dimensional

Sims. y experimentos para uno y dos dedos

Rabbani, H., *et al.*, Proc. Natl. Acad. Sci., 2018.

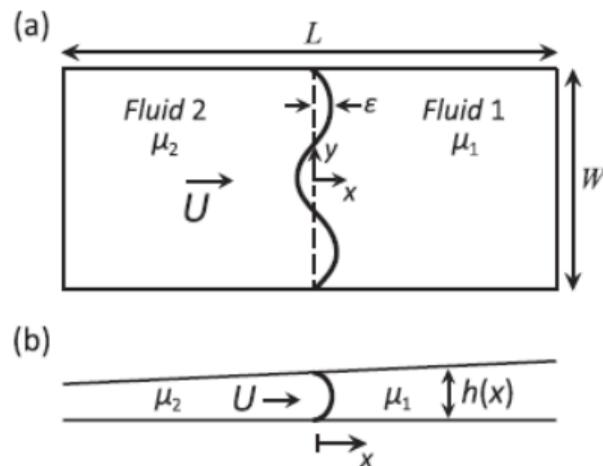
Estabilidad en medios porosos

► Profundidad variable linealmente

Al-Housseiny, T., Phys. Fluids, 2013.

Considera áng. cto. y long. onda de perturb.

Casos de desplazamientos rectilíneo y radial



(desplaz. rectilíneo)

$$b \rightarrow h(x) = \alpha x + h_0 \quad , \quad |\alpha| \ll 1$$

U : rapidez lejos de interfase

ε : perturbación sinusoidal

μ : viscosidad



1. Introducción
2. Objetivos y metodología
3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw
4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics
5. Conclusiones y perspectivas

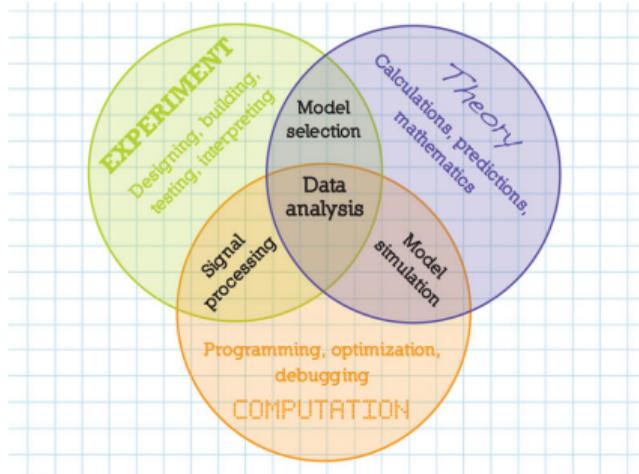


Objetivo general

Queremos deducir el **criterio de estabilidad** para una celda de profundidad variable y ponerlo a prueba en simulaciones en CFD-COMSOL

Objetivos específicos

1. Identificación de las generalidades para deducir criterios de estabilidad.
2. Propuesta y análisis de estabilidad para celda de profundidad variable.
3. Verificación (simulación) de los criterios obtenidos en la literatura.
4. Simulación del caso propuesto.



Enfoque **teórico-computacional**



Método analítico

1. **Análisis dimensional**
¿De qué depende la estabilidad?
2. **Verificaciones teóricas**
Aspectos generales
Condiciones de borde
Consistencia entre los criterios
3. **Análisis para celda de profundidad cuadrática**
4. **Estudio de mapas de estabilidad**
Interpretación de resultados

Simulaciones

1. **CFD-COMSOL Multiphysics 6.0**
2. **Geometrías:** cuasi-2D y 3D
3. **Física:** flujo laminar bifásico
4. **Materiales:** agua (inyectado) y aceite de motor (ocupante).
5. **Interfases:** inicialmente planas y perturbadas



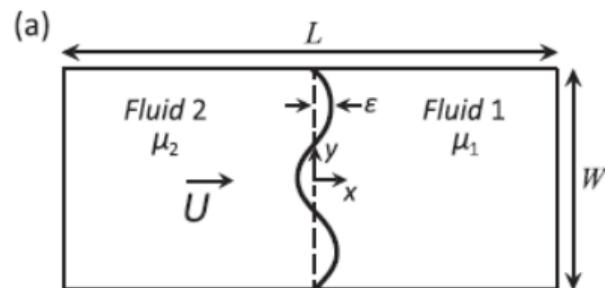
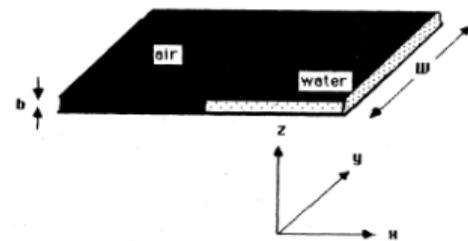
1. Introducción
2. Objetivos y metodología
3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw
 - 3.1 Análisis dimensional y generalidades
 - 3.2 Celda de profundidad constante
 - 3.3 Celdas de profundidad variable
4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics
5. Conclusiones y perspectivas



Para describir el flujo en la celda se considera la **aproximación de Darcy**

$$\vec{v}_j(x, y) = -\frac{b^2}{12\mu_j} \nabla p_j(x, y) \quad , \quad b \ll W$$

- ▶ j : etiqueta los fluidos ($j = 1, 2$)
- ▶ \vec{v} : *velocidad de Darcy*
- ▶ p_j : presión en el fluido j
- ▶ μ_j : viscosidad del fluido j .
- ▶ τ : tensión superficial



U : rapidez lejos de interfase
 ϵ : perturbación sinusoidal



Sup. la estabilidad de la interfase depende de W , b , τ , μ y v .

Usamos el teorema II de Buckingham

Y, por análisis dimensional

$$\left(\frac{b}{W}\right)^{\beta/\gamma} \left(\frac{\tau}{\mu v}\right) = ctte$$

Del análisis no podemos determinar

$$\beta/\gamma$$

¿Qué se obtiene de un estudio más riguroso?

La estabilidad está asociada a un parámetro adimensional que depende de la **relación de aspecto** y el **inverso del número capilar** Ca

$$d_0 \equiv \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{b}{W}\right)^2 \left(\frac{\tau}{v\mu}\right)$$



Se usa la ecuación de **Darcy** y la condición de **incompresibilidad**

$$\nabla \cdot (b\vec{v}) = 0$$

para obtener una ecuación diferencial para la presión

$$\frac{3}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial x} \right) + \nabla^2 p_j = 0$$

donde la profundidad de la celda b se expresa como una función $h(x)$ y p_j la presión en el fluido j .

La presión se escribe como la suma de dos términos asociados al caso no perturbado y a la perturbación ϵ_k .

$$p_j(x, y) = f_j(x) + g_{jk}(x)\epsilon_k(y, t)$$

$$\epsilon_k(y, t) = A \exp(iky + \sigma t)$$

Deben resolverse dos ec. diferenciales: una para f_j y otra para g_{jk}

A : amplitud de la pert. ($A \ll 1$)

k : número de onda de la pert.

σ : const. tiempo de la pert.



Condiciones iniciales

U es la rapidez de la interfase no perturbada y la perturbación no afecta a la presión lejos de la interfase:

$$\left. \frac{df_j}{dx} \right|_{x=0} \propto -U \quad , \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} g_{jk} = 0$$

Con p_j se calcula el salto en la interfase

$$\Delta p_\varepsilon = p_1(x = \varepsilon) - p_2(x = \varepsilon)$$

Este resultado se compara con la ley de **Young-Laplace**

$$\Delta p_{YL} = \frac{2\tau \cos \theta_c}{R} + \tau \kappa$$

R : radio de curvatura, κ : curvatura
 θ_c : áng. contacto

El criterio de estabilidad se deduce de

$$\Delta p_\varepsilon = \Delta p_{YL} \quad , \quad \sigma \leq 0$$

σ : const. tiempo de la pert.



Se supondrá que $\mu = \mu_1 \gg \mu_2$

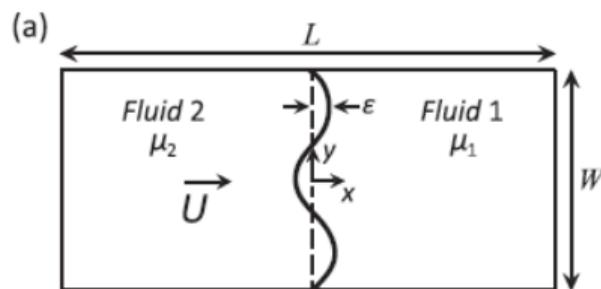
Al hacer $\Delta p_\varepsilon = \Delta p_{YL}$ obtenemos

$$\dot{A} = A \left(\frac{12\mu U}{b^2} - kb^2 \right) \frac{b^2}{12\mu} k$$

Requisito de estabilidad

$$\sigma \equiv \left(\frac{12\mu U}{b^2} - kb^2 \right) \frac{b^2}{12\mu} k \leq 0$$

σ nos dice si la pert. crece o decrece
 U está asociada a la estabilidad



Criterio de estabilidad

$$d_0 \equiv \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{b}{W} \right)^2 \left(\frac{\tau}{U\mu} \right) > \left(\frac{\lambda}{W} \right)^2,$$

$\lambda = W/n$ es la longitud de onda de la perturbación ($n = 1, 2, 3, \dots$).

El ancho máximo de un dedo es $W/2$



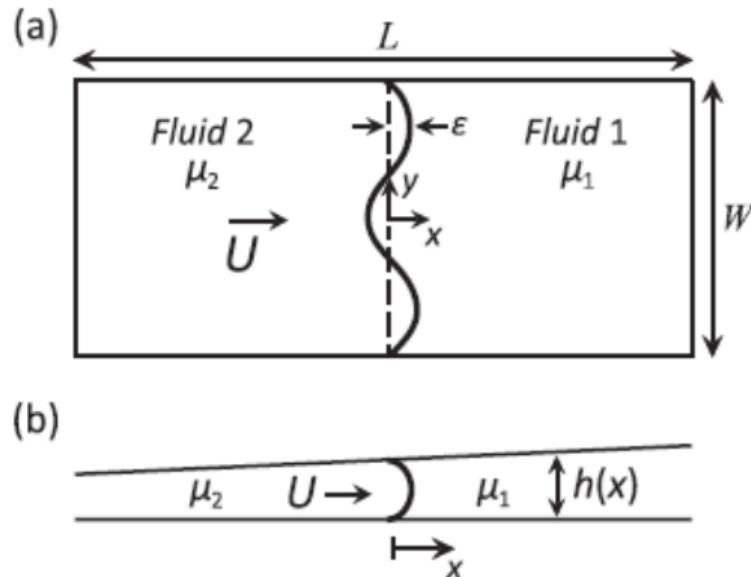
Celda de profundidad variable (lineal)

Modificaciones (desplaz. rectilíneo):

- ▶ $b \rightarrow h(x) = \alpha x + h_0$, $|\alpha| \ll 1$
- ▶ $\nabla \cdot (h\vec{v}_j) = 0 \implies \nabla \cdot (h\nabla p_j) = 0$
- ▶ **Young-Laplace:**

$$\Delta p_{YL} = \frac{2\tau \cos \theta_c}{R} + \tau \kappa$$

- ▶ **Perturbación:** superposición de modos normales



Criterio de estabilidad

$$(1 + M) \frac{\sigma h_0}{U} = \left(1 - M + \frac{2\alpha \cos \theta_c}{Ca} \right) h_0 k - \frac{(h_0 k)^3}{Ca} < 0 , \quad M \equiv \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



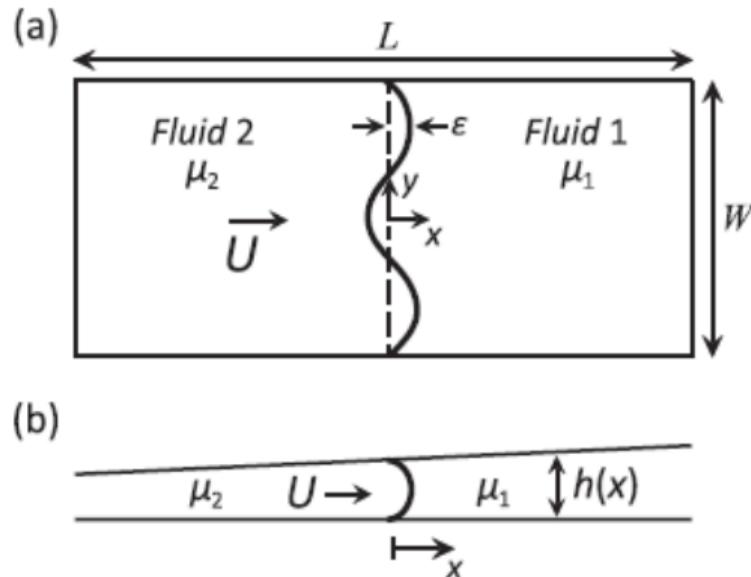
Celda de profundidad variable (lineal)

Modificaciones (desplaz. rectilíneo):

- ▶ $b \rightarrow h(x) = \alpha x + h_0$, $|\alpha| \ll 1$
- ▶ $\nabla \cdot (h\vec{v}_j) = 0 \implies \nabla \cdot (h\nabla p_j) = 0$
- ▶ **Young-Laplace:**

$$\Delta p_{YL} = \frac{2\tau \cos \theta_c}{R} + \tau \kappa$$

- ▶ **Perturbación:** superposición de modos normales



Criterio de estabilidad (para cualquier k):

$$Ca > \frac{2\alpha \cos \theta_c}{M - 1} , \quad M \equiv \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



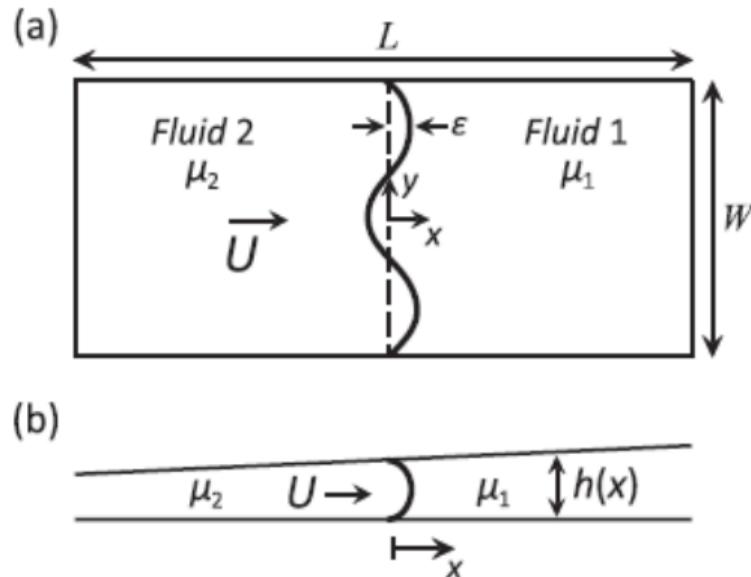
Celda de profundidad variable (lineal)

Modificaciones (desplaz. rectilíneo):

- ▶ $b \rightarrow h(x) = \alpha x + h_0$, $|\alpha| \ll 1$
- ▶ $\nabla \cdot (h\vec{v}_j) = 0 \implies \nabla \cdot (h\nabla p_j) = 0$
- ▶ **Young-Laplace:**

$$\Delta p_{YL} = \frac{2\tau \cos \theta_c}{R} + \tau \kappa$$

- ▶ **Perturbación:** superposición de modos normales



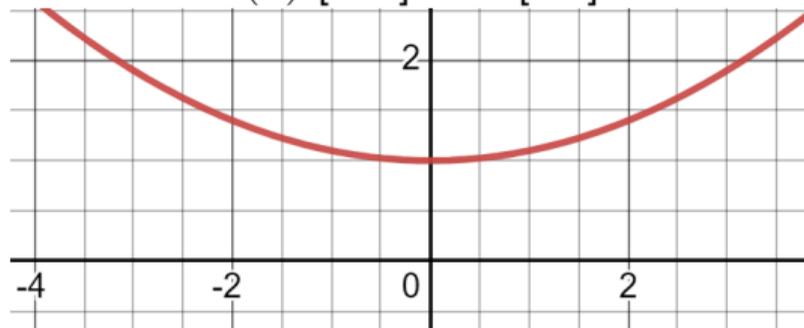
Celda de profundidad constante es un caso particular con $\alpha = 0$ y $M \approx 0$

$$1 - \frac{h_0^2 k^2}{Ca} = \frac{\sigma}{kU} < 0 \implies 1 - d_0 n^2 < 0$$



Caso de profundidad cuadrática

$h(x)$ [mm] vs x [dm]



$$b \rightarrow h(x) = \alpha x^2 + h_0 \quad , \quad |\alpha| \ll 1$$

Para la presión, debemos resolver:

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{6\alpha}{h_0} x \frac{\partial f_j}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^2} + \frac{6\alpha}{h_0} x \frac{\partial g_{jk}}{\partial x} - k^2 g_{jk} = 0$$

Las soluciones dependen de...

Una **función error**, una **gaussiana** y un **polinomio de Hermite** H_m



$$f_j(x) \propto -\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right) + \text{cte} \quad , \quad g_{jk}(x) = c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0}x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha}-1}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right)$$

Escribimos la presión

$$p_j = -\frac{12\mu_j}{h_0^2}U \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{h_0}{3\alpha}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right) \right] + c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0}x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha}-1}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right) + p_0$$

Ahora sí podemos hacer expansión de Taylor para x pequeño.

Sin embargo, no es tan fácil...



1. Introducción
2. Objetivos y metodología
3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw
4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics
 - 4.1 Geometría cuasi-2D - Profundidad constante
 - 4.2 Geometría 3D - Profundidad constante
5. Conclusiones y perspectivas



Configuración de las simulaciones

- ▶ El **aceite** ($\mu_1 = 0,3267 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) es desplazado por la inyección de **agua** ($\mu_2 \ll \mu_1$).
- ▶ Vista del plano XY .
- ▶ La longitud es de 180 mm.
- ▶ El ancho W es de 35 mm.
- ▶ La profundidad b es de 2mm.
Shallow tickness approximation

Resultados simulados

Inestabilidad para interfaces inicialmente planas

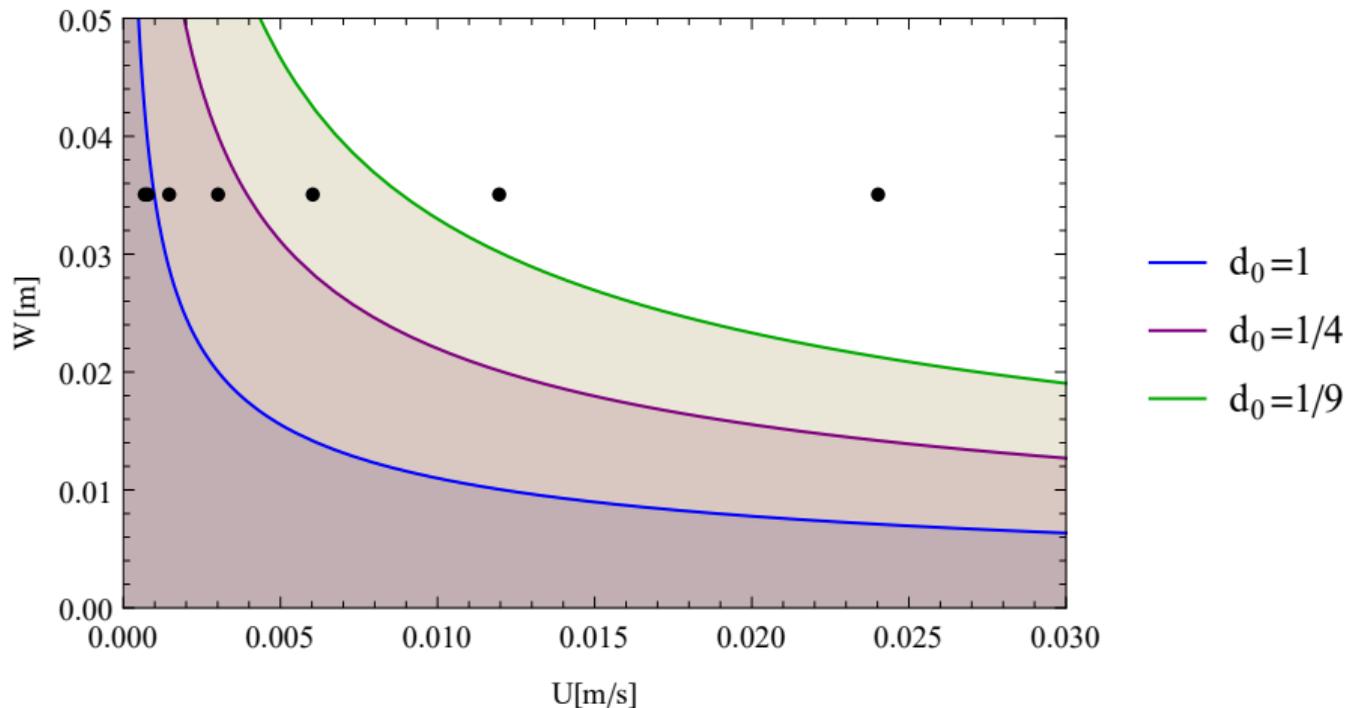
U [m/s]	d_0	Inestabilidad
0.024	0.041	Dos dedos
0.012	0.082	Dos dedos
0.006	0.16	Dos dedos
0.003	0.33	Un dedo
0.0015	0.66	Un dedo
0.00066	1.5	Estable

Variamos la velocidad de inyección



Puntos simulados vs expectativas teóricas (número de dedos)

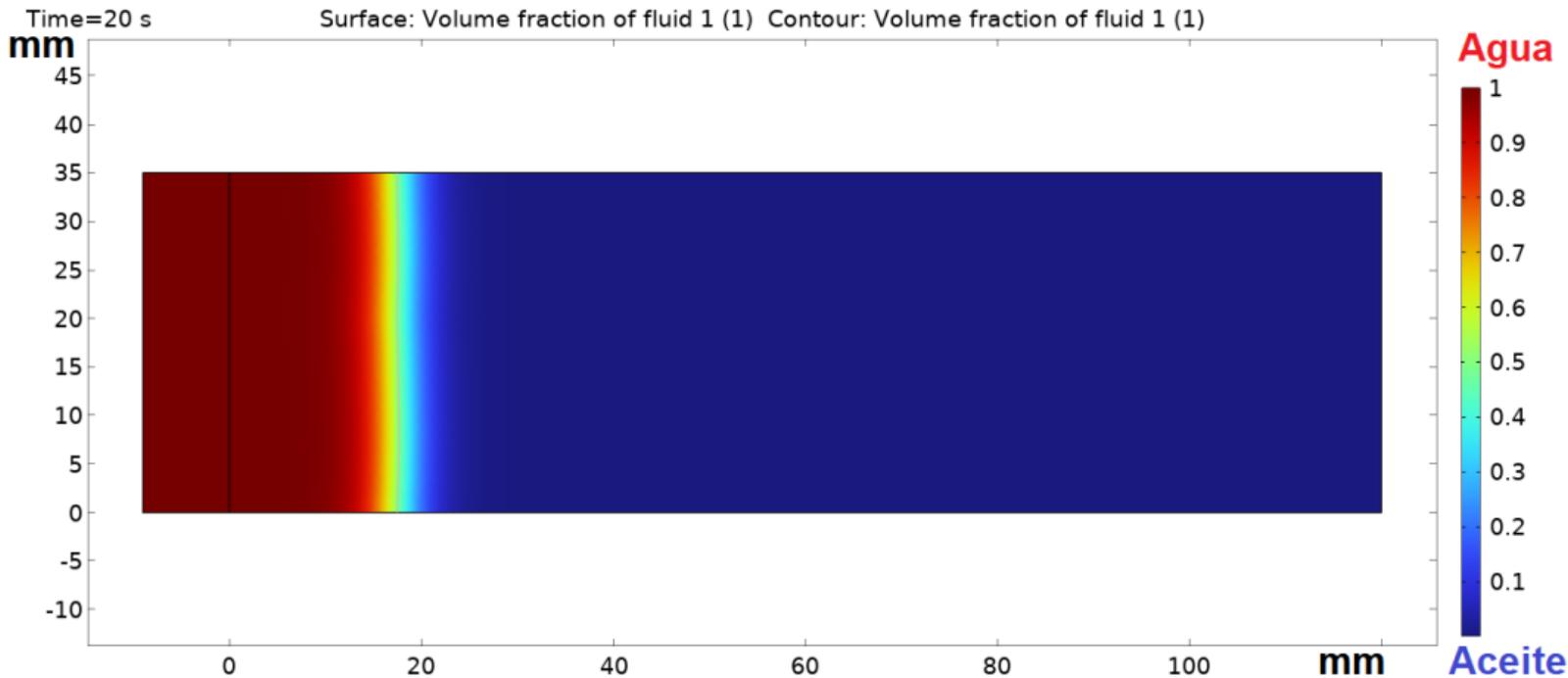
Mapa de estabilidad W vs U





El **agua** es inyectada y desplaza al **aceite**, $d_0 = 1,5 > 1$, $b = 2mm$

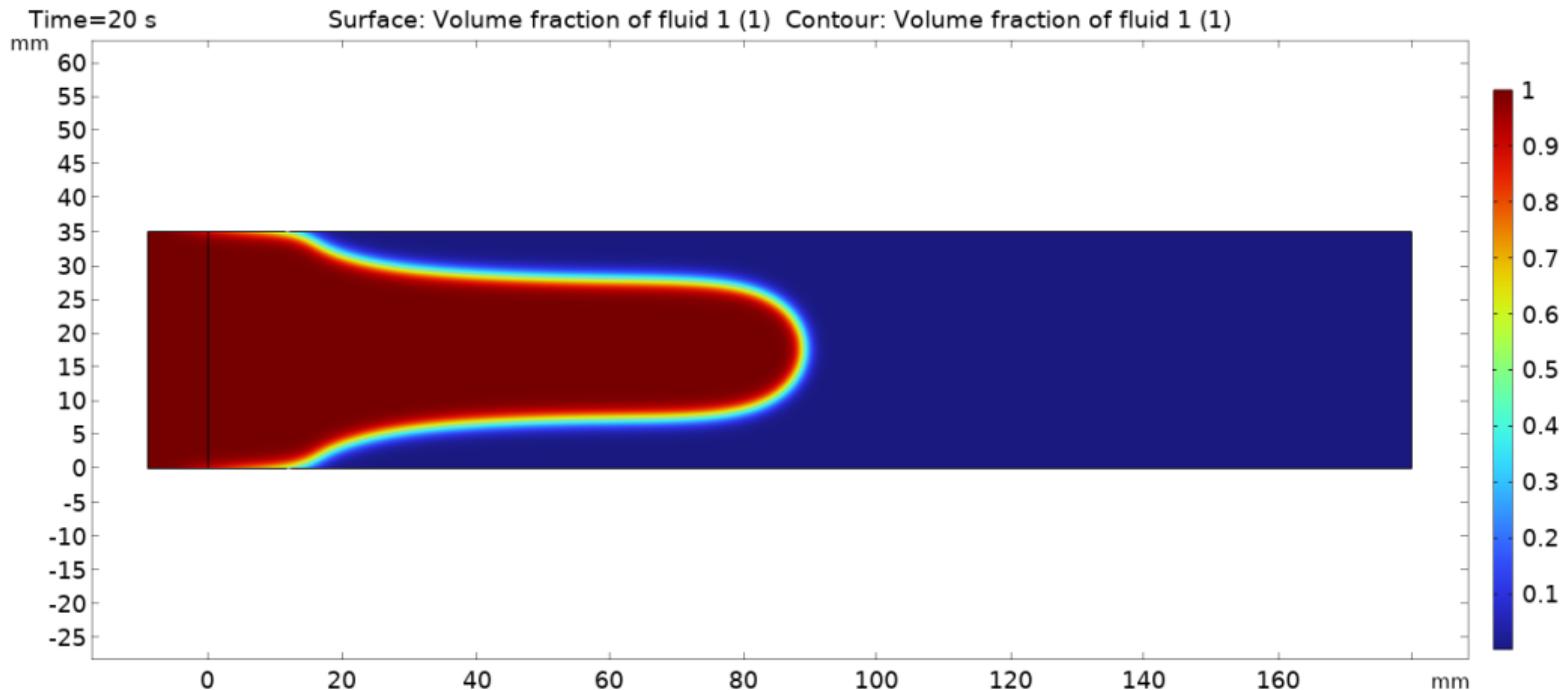
Caso estable





El **agua** es inyectada y desplaza al **aceite**, $d_0 = 0,33 < 1$, $b = 2mm$

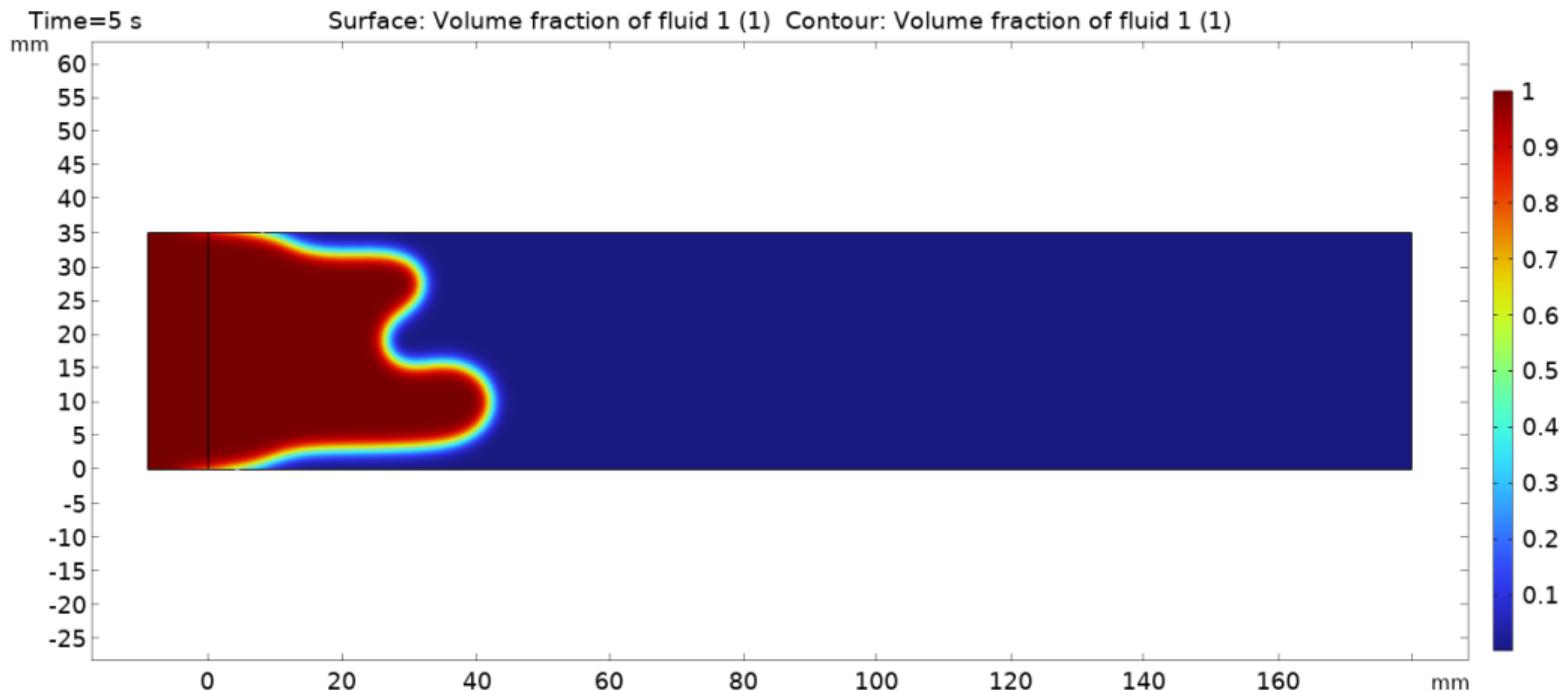
Inestable - un dedo





El **agua** es inyectada y desplaza al **aceite**, $d_0 = 0,16 < 1$, $b = 2mm$

Inestable - dos dedos

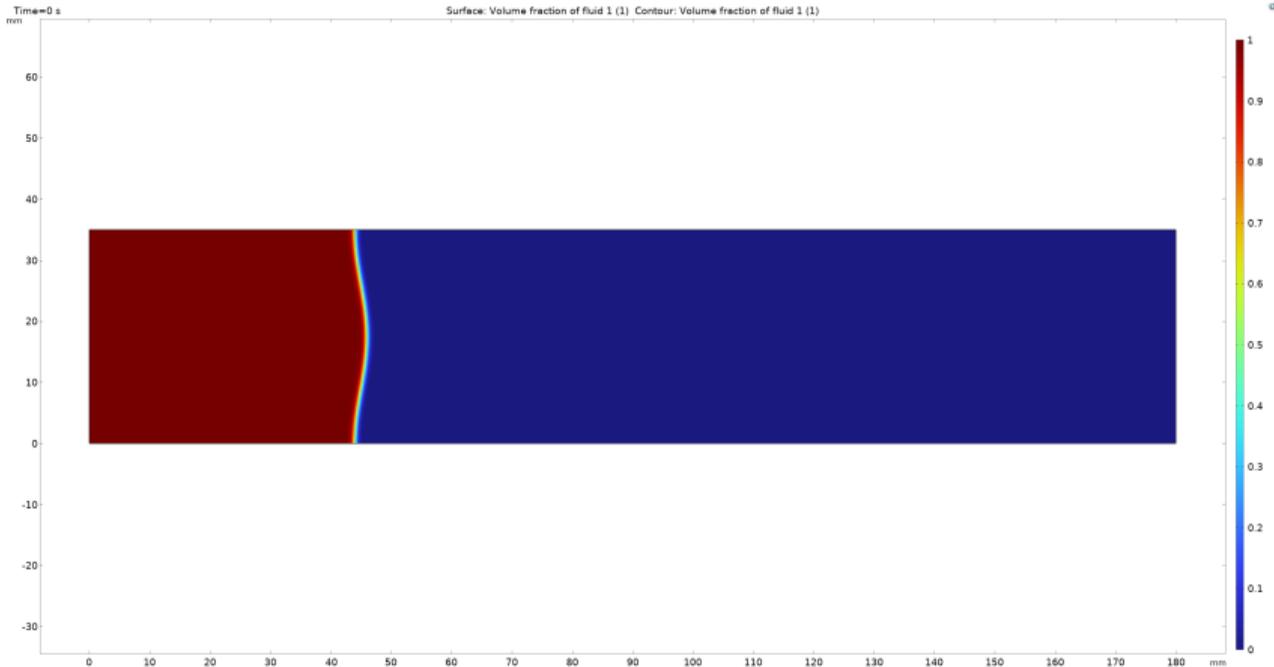






Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 1$)

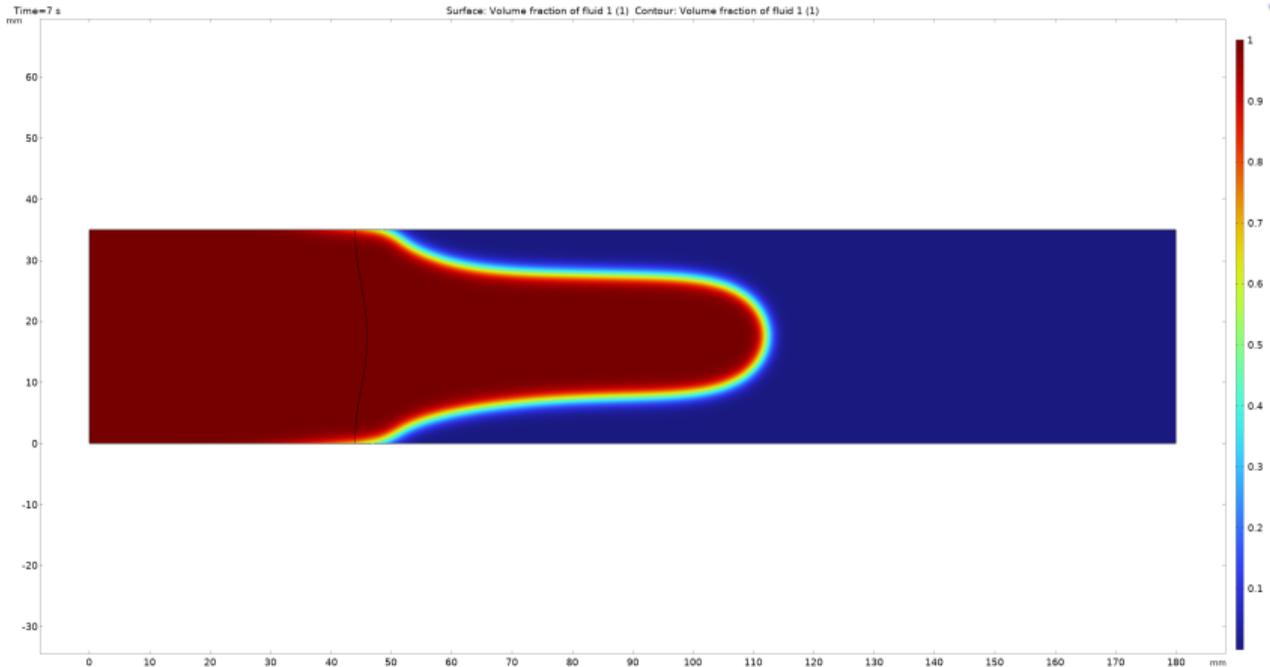
$$U = 0,012 \text{ m/s}$$





Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 1$)

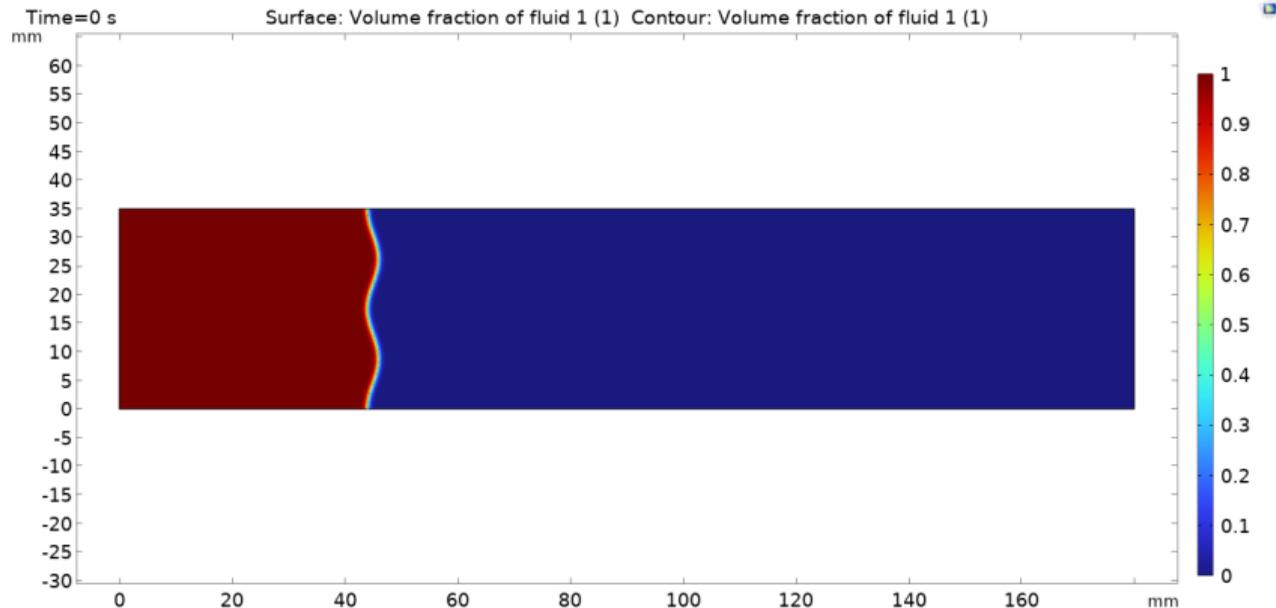
$$U = 0,012 \text{ m/s}$$





Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 2$)

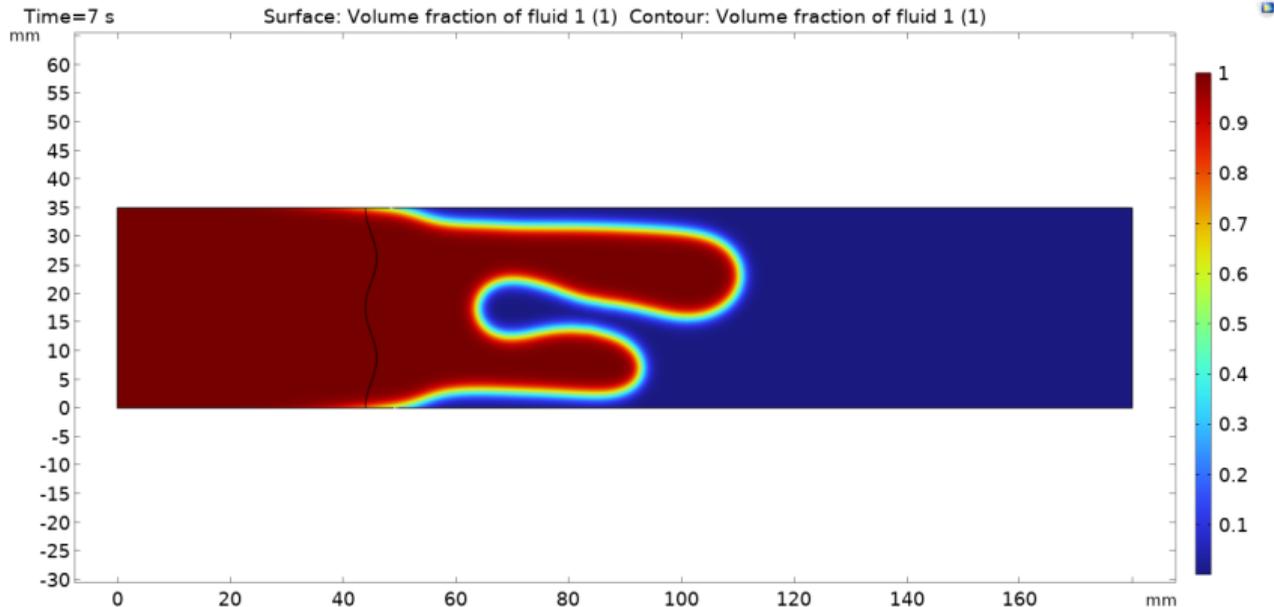
$$U = 0,012 \text{ m/s}$$





Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 2$)

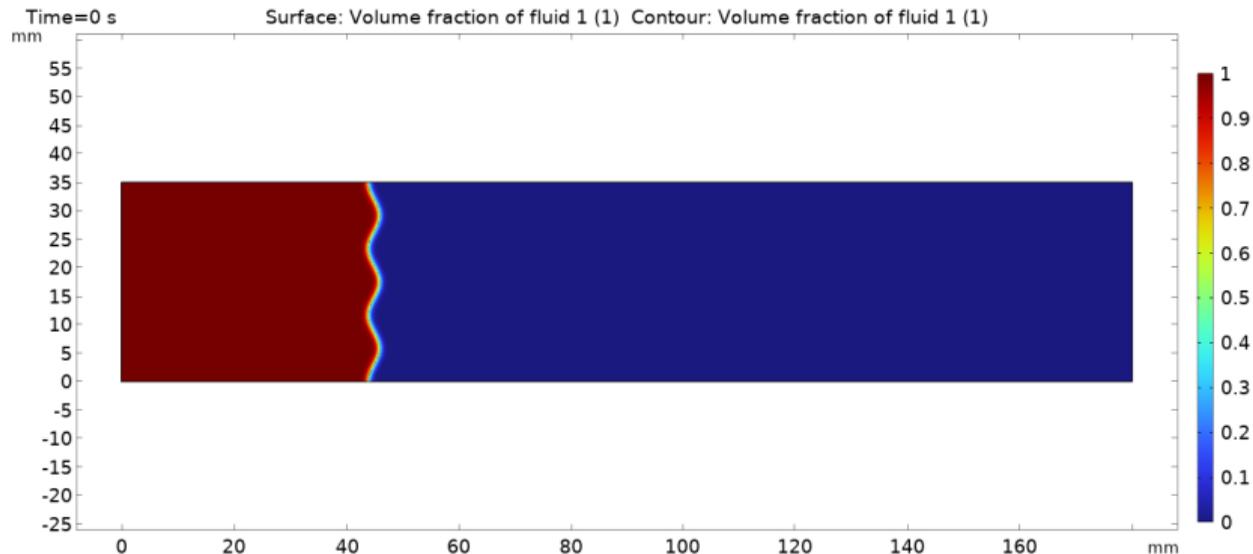
$$U = 0,012 \text{ m/s}$$





Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 3$)

$$U = 0,012 \text{ m/s}$$

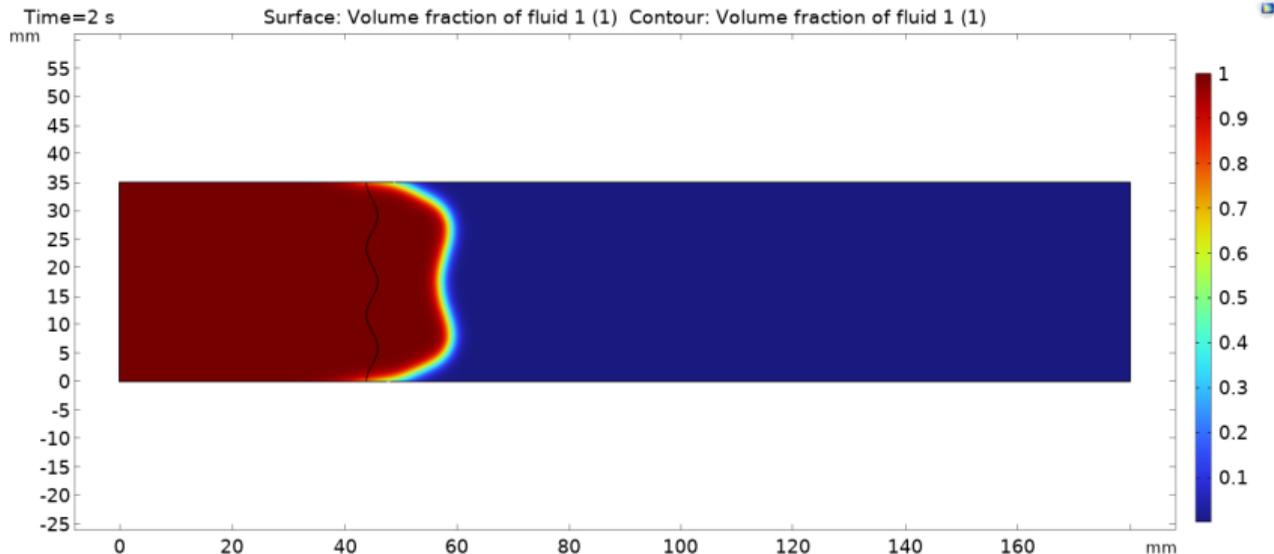


¿No se pueden inducir más dedos de los que aparecerían si inicialmente la interfase no está perturbada?



Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 3$)

$$U = 0,012 \text{ m/s}$$

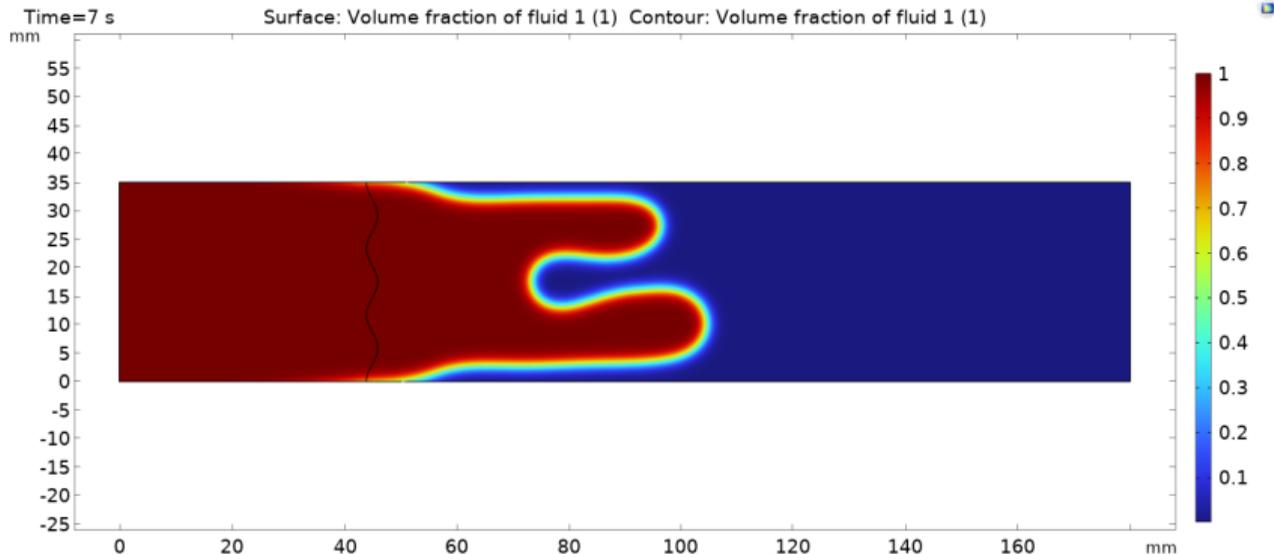


¿No se pueden inducir más dedos de los que aparecerían si inicialmente la interfase no está perturbada?



Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 3$)

$$U = 0,012 \text{ m/s}$$



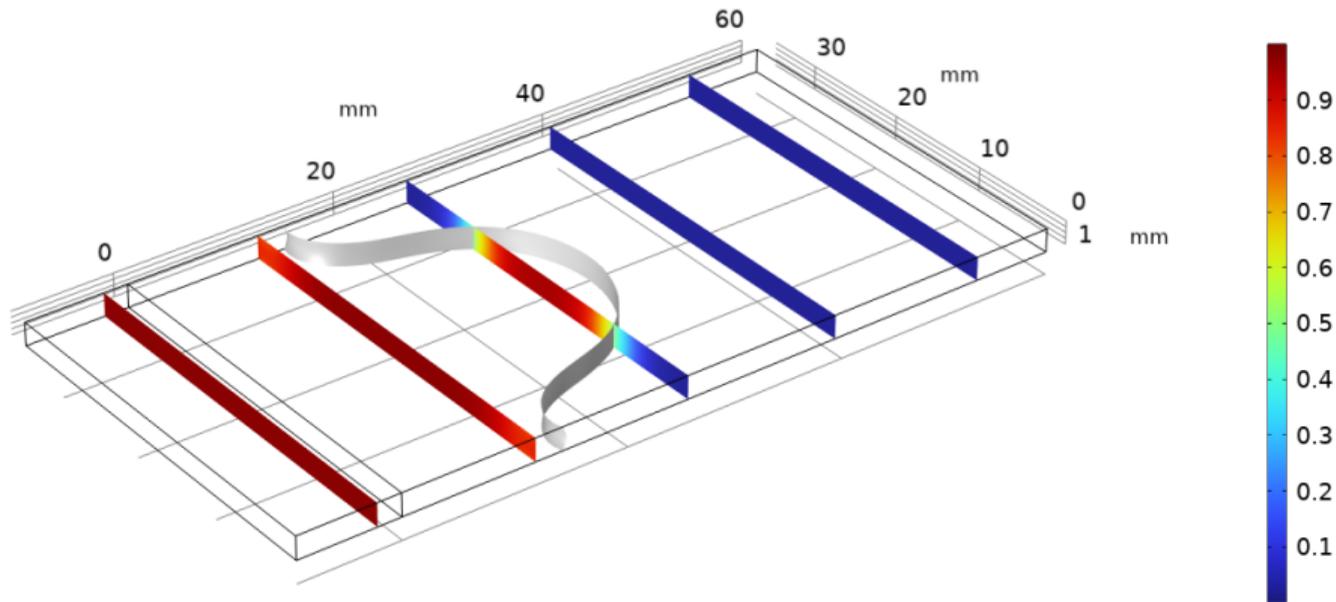
¿No se pueden inducir más dedos de los que aparecerían si inicialmente la interfase no está perturbada?



$$U = 0,012 \text{ m/s}$$

Time=2 s

Slice: Volume fraction of fluid 1 (1) Isosurface: Volume fraction of fluid 1 (1)



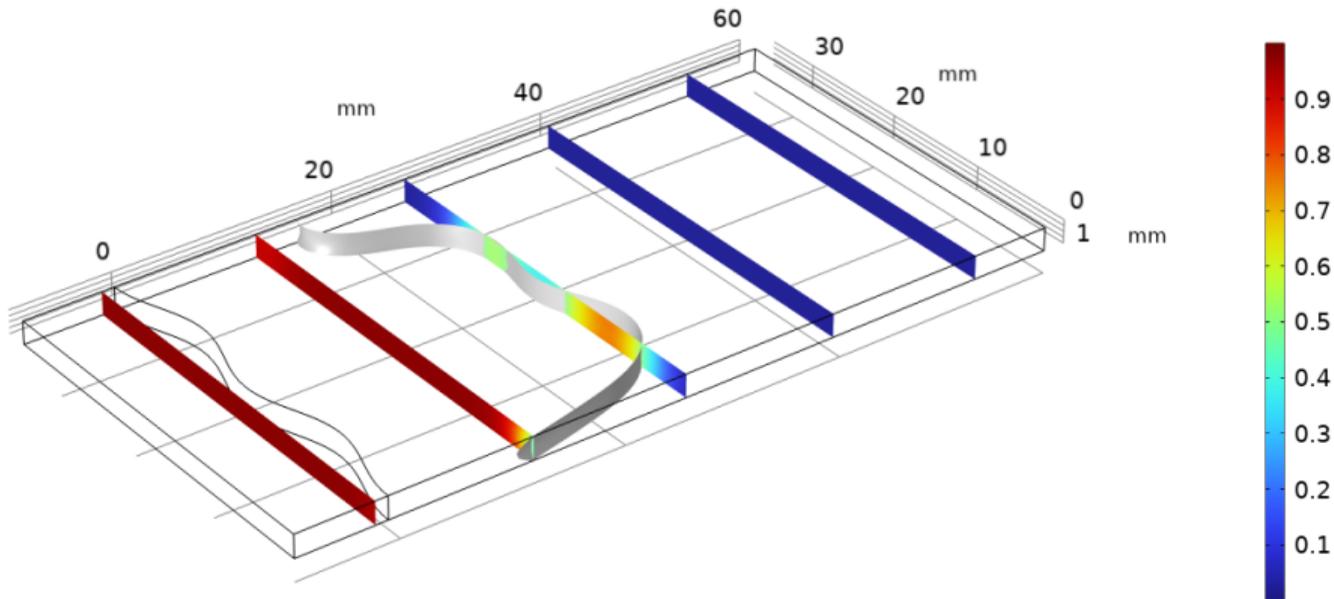


$$U = 0,012 \text{ m/s}$$

Introducimos una perturbación sinusoidal inicial ($n = 2$)

Time=2 s

Slice: Volume fraction of fluid 1 (1) Isosurface: Volume fraction of fluid 1 (1)





1. Introducción
2. Objetivos y metodología
3. Estudios analíticos de estabilidad en celdas Hele-Shaw
4. Simulaciones en CFD-COMSOL Multiphysics
5. Conclusiones y perspectivas



En lo teórico

1. El método es **aplicable** a cualquier profundidad x -dep.
2. El método puede conducir a **complejas expresiones** de p_j .
3. Resultados para profundidades const. y lin. son **consistentes**.

En lo computacional

1. Estabilidad consistente con la predicción teórica.
2. Inconsistencia en la cantidad de dedos para un mismo d_0 .
3. Hacer $d_0 \rightarrow 0$ promueve la aparición de más dedos.
4. Pert. sinusoidales pueden disminuir la cantidad de dedos.
5. Aumento en tiempo de cómputo para $d_0 \approx 1$.



Perspectivas

- ▶ Aplicar el método analítico a celdas con $b \rightarrow h(x) = x^\alpha + h_0$ con $\alpha \in [0, 2]$.
- ▶ ¿Es posible aumentar la cantidad de dedos al introducir una perturbación?
- ▶ Simulaciones en 3D de las celdas con profundidades variables.
- ▶ Consideración de simulaciones con estructuras porosas.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.



Sup. la estabilidad de la interfase depende de W , b , τ , μ y v .

Por el teorema Π de Buckingham

Existen α , β , γ , δ y ϵ tales que

$$W^\alpha b^\beta \tau^\gamma \mu^\delta v^\epsilon = ctte$$

Por análisis dimensional

{Longitud, Tiempo, Masa} = { L , T , M }

$$L^\alpha L^\beta \left(\frac{M}{T^2}\right)^\gamma \left(\frac{M}{LT}\right)^\delta \left(\frac{L}{T}\right)^\epsilon = 1$$

$$\left(\frac{b}{w}\right)^{\beta/\gamma} \left(\frac{\tau}{\mu v}\right) = ctte$$

¿Qué se obtiene de un estudio más riguroso?

La estabilidad está asociada a un parámetro adimensional que depende de la **relación de aspecto** y el **inverso del número capilar Ca**

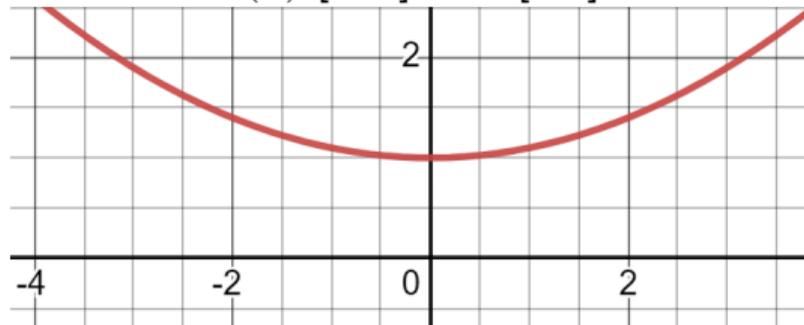
$$d_0 \equiv \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{b}{W}\right)^2 \left(\frac{\tau}{v\mu}\right)$$



Celda de profundidad variable (cuadrática)

Caso de profundidad cuadrática

$h(x)$ [mm] vs x [dm]



$$b \rightarrow h(x) = \alpha x^2 + h_0 \quad , \quad |\alpha| \ll 1$$

Para la presión, debemos resolver:

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{6\alpha}{h_0} x \frac{\partial f_j}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^2} + \frac{6\alpha}{h_0} x \frac{\partial g_{jk}}{\partial x} - k^2 g_{jk} = 0$$

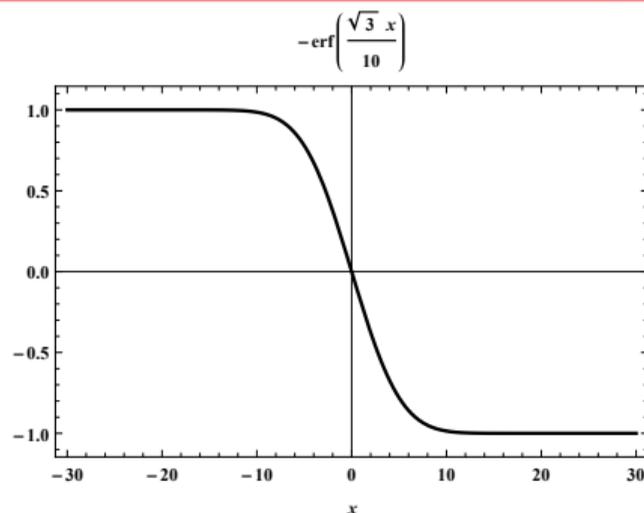
Las soluciones dependen de...

Una **función error**, una **gaussiana**, un **polinomio de Hermite** H_m y una **función hipergeométrica de Kummer** ${}_1F_1$



Términos asociados al caso no perturbado

$$f_j(x) \propto -\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right) + \text{cte}$$



Términos asociados al caso perturbado

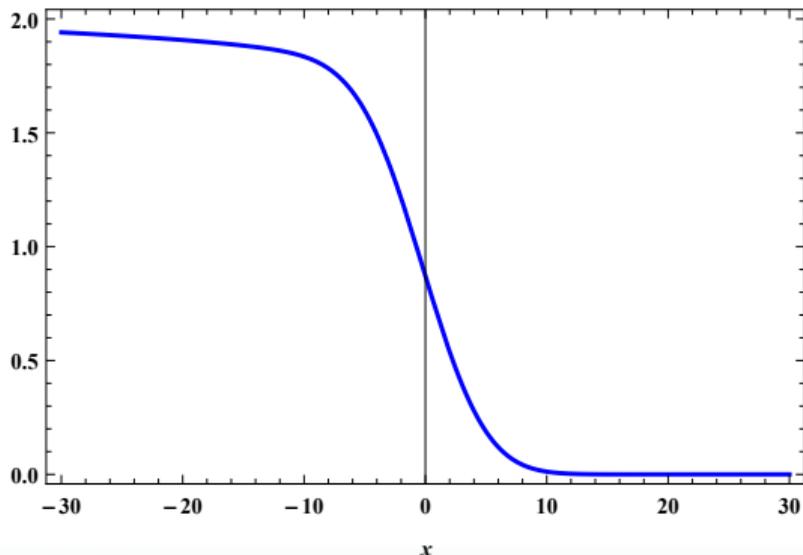
$$g_{jk}(x) = c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0}x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha}-1}\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}}x\right) + c_2 e^{-\frac{3\alpha}{h_0}x^2} {}_1F_1\left(\frac{h_0 k^2}{12\alpha} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3\alpha}{h_0}x^2\right)$$



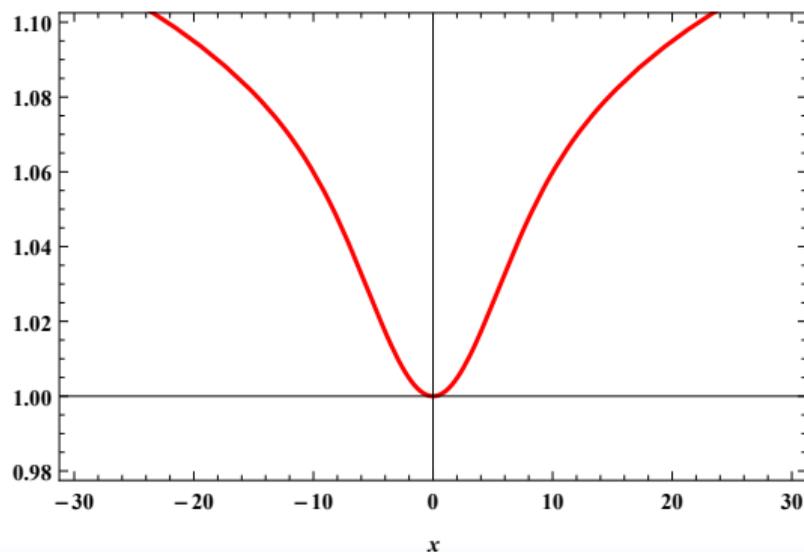
Celda de profundidad variable (cuadrática)

$$g_{jk}(x) = c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0} x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha} - 1} \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}} x \right) + c_2 e^{-\frac{3\alpha}{h_0} x^2} {}_1F_1 \left(\frac{h_0 k^2}{12\alpha} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3\alpha}{h_0} x^2 \right)$$

$$e^{-\frac{3x^2}{100}} H_{-1.04167} \left(\frac{\sqrt{3} x}{10} \right)$$



$$e^{-\frac{3x^2}{100}} {}_1F_1 \left(0.520833; \frac{1}{2}; \frac{3x^2}{100} \right)$$





Celda de profundidad variable (cuadrática)

$$g_{jk}(x) = c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0} x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha} - 1} \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}} x \right) + c_2 e^{-\frac{3\alpha}{h_0} x^2} {}_1F_1 \left(\frac{h_0 k^2}{12\alpha} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3\alpha}{h_0} x^2 \right)$$

- ▶ La función que acompaña a c_2 diverge para $|x| \rightarrow \infty$.
- ▶ La función que acompaña a c_1 converge conforme el largo de la celda aumenta ($|x| \rightarrow L$)

Escribimos la presión

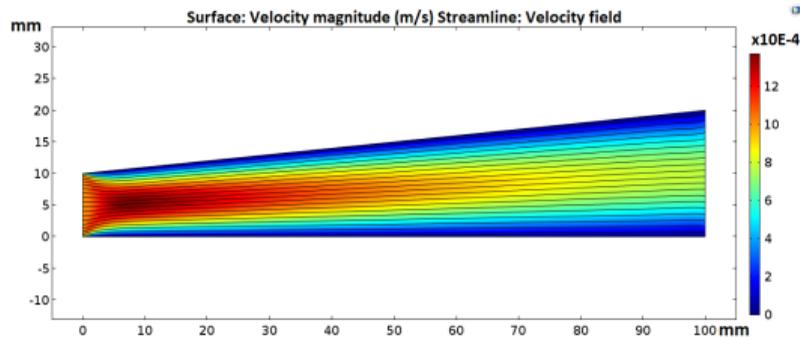
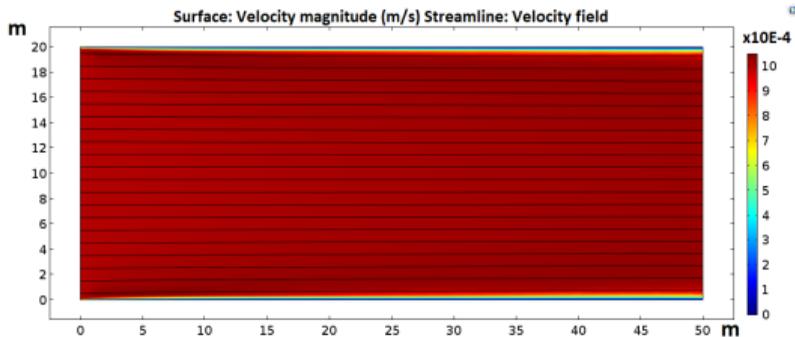
$$p_j = -\frac{12\mu_j}{h_0^2} U \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{h_0}{3\alpha}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}} x \right) \right] + c_1 e^{-\frac{3\alpha}{h_0} x^2} H_{-\frac{h_0 k^2}{6\alpha} - 1} \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{h_0}} x \right) + p_0$$

**Ahora sí podemos hacer expansión de Taylor para x pequeño.
Sin embargo, no es tan fácil...**

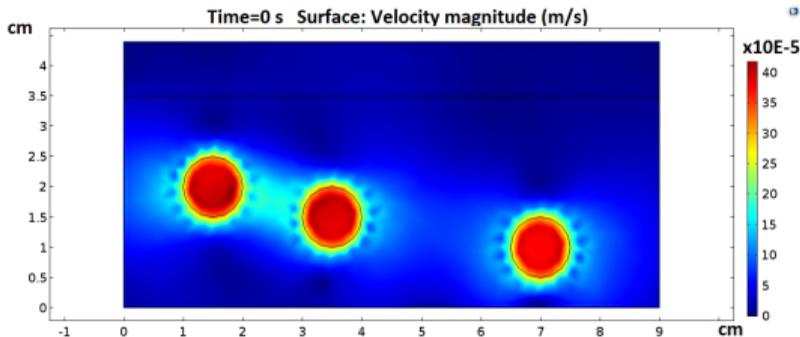


Algunos resultados de las primeras simulaciones

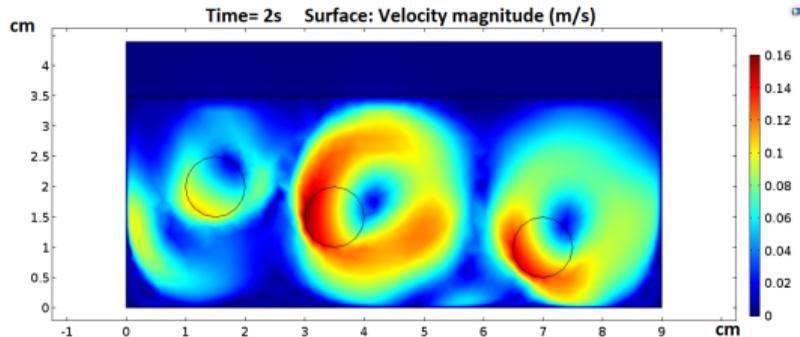
Simulaciones con solamente agua



Simulaciones con “gotas” de aceite en agua y gravedad



$t = 0$ s



$t = 2$ s