EL UNIVERSO AL ALCANCE DEL CÁLCULO

PARTE III
DISTANCIAS Y VELOCIDADES

Héctor Rago
hectorrago@gmail.com

CONSTANTES Y PARÁMETROS

Velocidad de la luz	$c = 3 \times 10^{10}\, cm/seg$
Constante gravitacional	$G = 6{,}67 \times 10^{-8}\, cm^3/grseg^2$
Parámetro de Hubble	$H_0 = 73 Km/segMpc$
Tiempo de Hubble	$H_0^{-1} = 13{,}8 \times 10^9\, años$
Radio o longitud de Hubble	$L_{H_0} = 1{,}3 \times 10^{28}\, cm$
Densidad Total o crítica	$\rho_{T,0} \equiv \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} \cong 9 \times 10^{-30} \dfrac{gr}{cm^3} \approx 5\, protones/mt^3$
Omega de la materia	$\Omega_m \equiv \rho_{m,0}/\rho_T = 0.27$
Omega de la radiación	$\Omega_r \equiv \rho_{r,0}/\rho_T = 5 \times 10^{-5}$
Omega del vacío	$\Omega_v \equiv \rho_v/\rho_T = 0.73$

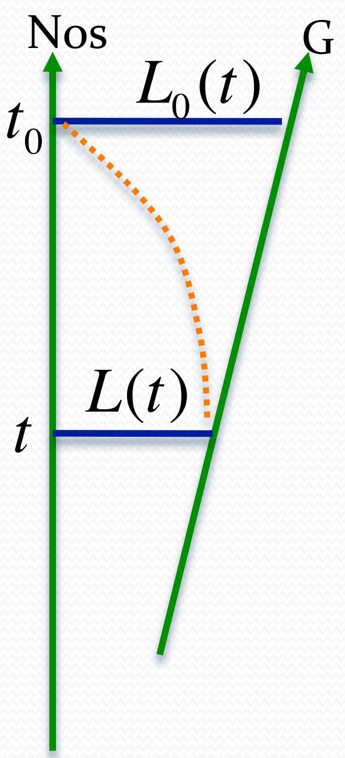
DISTANCIAS EN EINSTEIN - de SITTER

Para materia no relativista

$$\boxed{a(t) = (t/t_0)^{2/3}}$$

Distancia Actual de
Una galaxia que emitió en t

$$L_0(t) = c t_0^{2/3} \int_t^{t_0} \frac{dt}{t^{2/3}}$$



$$L_0(t) = 3ct_0[1-(t/t_0)^{1/3}] \qquad L_0(0) = L_{horiz} = 3ct_0$$

Como

$$H_0 = \frac{2}{3t_0} \Rightarrow \quad 3ct_0 = 2L_{H_0} \qquad L_{horiz} = 2L_{H_0}$$

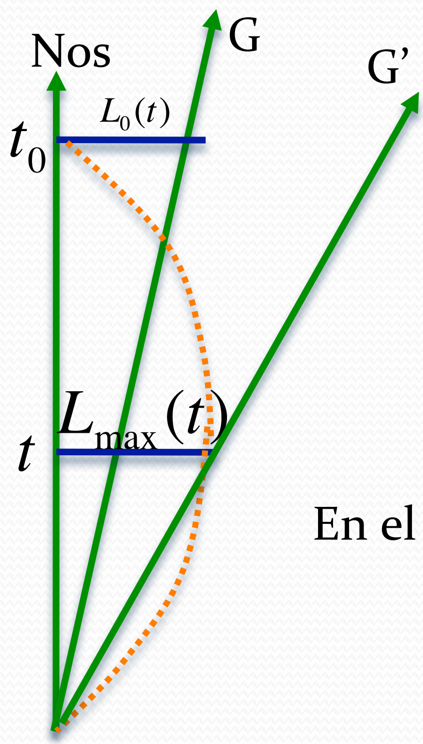
$$\boxed{L_0(t) = 2L_{H_0}[1-(t/t_0)^{1/3}]}$$

DISTANCIAS EN EINSTEIN - de SITTER

Distancia cuando emitió
o cono de luz

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3}$$

$$L(t) = aL_0$$



$$L(t) = (\frac{t}{t_0})^{2/3} 2L_{H_0}[1-(t/t_0)^{1/3}]$$

$$\boxed{L(t) = 2L_{H_0}[(t/t_0)^{2/3} - (t/t_0)]}$$

En el bigbang $L(0) = 0$

Hoy $L(t_0) = 0$

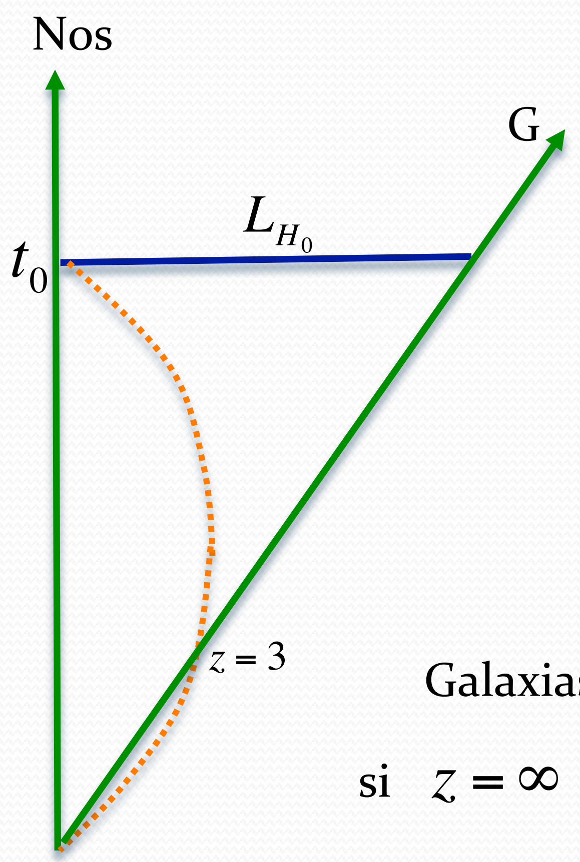
$\Rightarrow$ $L_{max}(t)$

$$\frac{dL(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow t_{max} = \frac{8}{27}t_0$$

$$L(t_{max}) = \frac{8}{27}L_{H_0}$$

DISTANCIAS EN EINSTEIN - de SITTER
En términos de z

Distancias actuales



$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \qquad z+1 = a^{-1}$$

$$z+1 = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \qquad \frac{t}{t_0} = (1+z)^{-3/2}$$

$$L_0(t) = 2L_{H_0}[1-(t/t_0)^{1/3}]$$

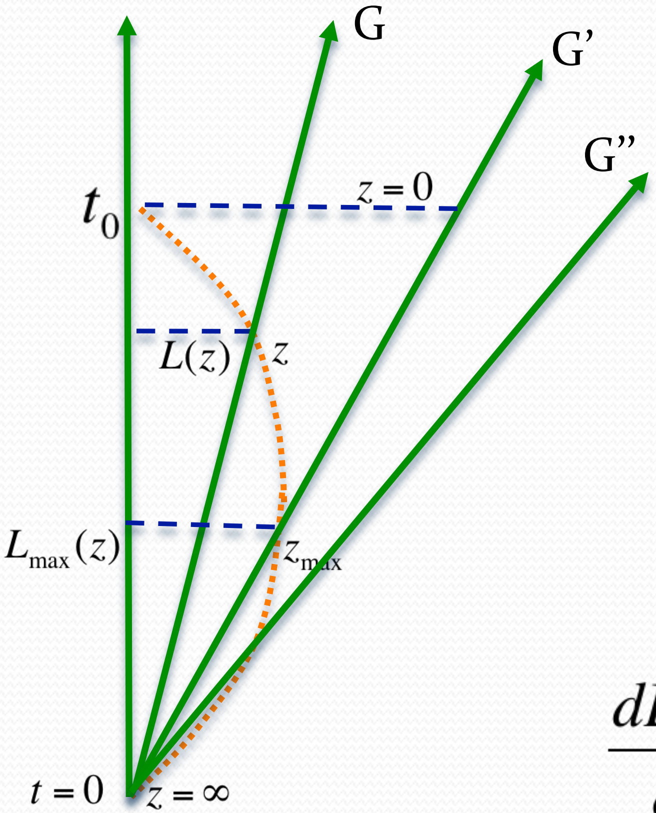
$$\boxed{L_0(z) = 2L_{H_0}[1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}]}$$

Galaxias con z = 3, $\quad L_0(z)\big|_{z=3} = L_{H_0}$

si $\; z = \infty \;$ (big-bang) $\quad L_0(z)\big|_{z=\infty} \equiv L_{horiz} = 2L_{H_0} = 3ct_0$

DISTANCIAS EN EINSTEIN - de SITTER
En términos de z

Distancias de emisión
o cono de luz



$$a(t) = (t/t_0)^{2/3} \qquad \frac{t}{t_0} = (1+z)^{-3/2}$$

$$L(z) = L_0 (1+z)^{-1}$$

$$\boxed{L(z) = 2L_{H_0}\left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right]}$$

$$Si \quad z = 3 \quad \Rightarrow L(3) = (1/4)L_{H_0}$$

$$L = 0 \quad si \quad z = 0 \quad y \quad z = \infty$$

$$\frac{dL_{max}}{dz} = 0 \quad \Rightarrow z_{max} = 5/4 \qquad L(z_{max}) = \frac{8}{27} L_{H_0}$$

VELOCIDADES EN EINSTEIN de SITTER

Velocidad actual Vo

$$V(t_0) = H(t_0) L_0$$

$$H_0 L_{H_0} = c$$

$$L_0(z) = 2 L_{H_0} [1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}]$$

$$\boxed{V_0(z) = 2c[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}]}$$

$Si \quad z = 3 \quad \Rightarrow V_0 = c$ Galaxia en la esfera de Hubble

$Si \quad z = \infty \quad \Rightarrow V_0 = 2c$ Galaxia en el horizonte

VELOCIDADES EN EINSTEIN de SITTER

Velocidad cuando emisión

$$V(z) = H(z)L(z)$$

$$\frac{H(t)}{H_0} = \frac{t_0}{t} = (1+z)^{3/2}$$

$$L(z) = 2L_{H_0}\left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right]$$

$$\boxed{V(z) = 2c[\sqrt{1+z} - 1]}$$

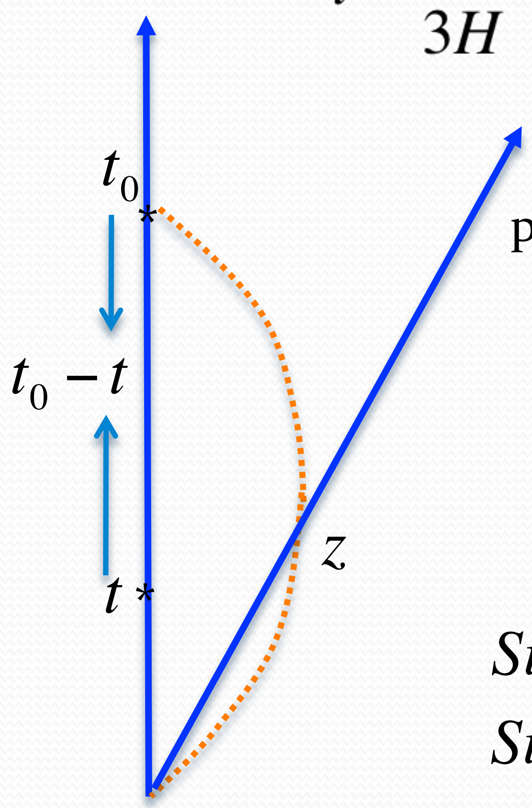
$Si \quad z = 5/4 \quad \Rightarrow V_{z=5/4} = c$ Porque la galaxia estaba a un radio de Hubble de nosotros

$Si \quad z = 3 \quad \Rightarrow V_{z=3} = 2c$ Porque la galaxia estaba a dos radio de Hubble de nosotros

$Si \quad z = \infty \quad \Rightarrow V_{z=\infty} = \infty$ Porque la ‘constante de Hubble diverge en el BB

TIEMPO DE VUELO DE LOS FOTONES EN E-d S

$$t = \frac{2}{3H} \quad t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad \Rightarrow t_0 - t = \frac{2}{3H_0} - \frac{2}{3H} = \frac{2}{3H_0}\left(1 - \frac{H_0}{H}\right)$$



pero $\quad \frac{H_0}{H} = \frac{t}{t_0} = (1+z)^{-\frac{3}{2}}$

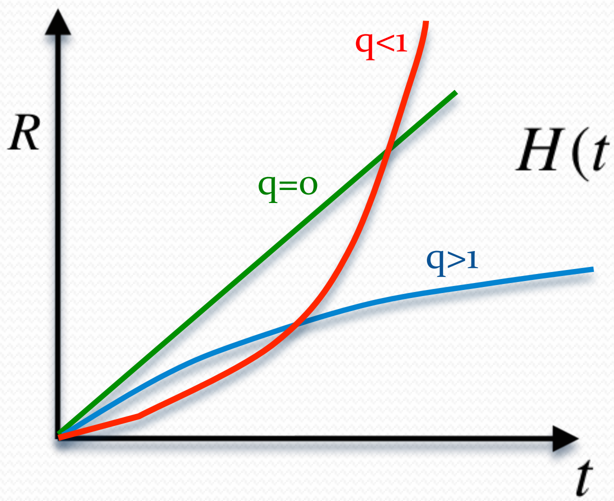
$$\boxed{t_0 - t = \frac{2}{3H_0}\left[1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right]}$$

$$Si \quad z = 0 \quad \Rightarrow t = t_0$$

$$Si \quad z = \infty \quad \Rightarrow t_0 - t = \frac{2}{3H_0}$$

MODELO DE UNIVERSO $a(t) \sim t^n$

$$\boxed{a(t) = (t/t_0)^n}$$



$$H(t) = \frac{n}{t}$$

$$q = \frac{1-n}{n}$$

$n < 1$ desacelerado

$n = 1$ aceleración = 0

$n > 1$ acelerado

$$n = \frac{1}{1+q}$$

Radio de Hubble $L_{H_0} = \dfrac{ct_0}{n}$

$$t \sim a^{1/n}(t) \quad \Rightarrow \frac{t_0}{t} = (1+z)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = H_0(1+z)^{1/n}}$$

MODELO DE UNIVERSO $a(t) \sim t^n$

Distancia actual $L_0(t) = a_0 r_1 = c\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^n$

$$H_0 = \frac{n}{t_0}$$

$$\frac{t_0}{t} = (1+z)^{1/n}$$

$$q = \frac{1-n}{n}$$

$$L_0(t) = ct_0^n \int_t^{t_0} \frac{dt}{t^n} = \frac{ct_0}{1-n}[1-(t_0/t)^{n-1}]$$

$$\Rightarrow \boxed{L_0(z) = \frac{L_{H_0}}{q}[1-(1+z)^{-q}]}$$

$Si \;\; q < 0 \quad \lim_{z \to \infty} L_0(z) = \infty$ $\Rightarrow$ Universos acelerados no tienen horizontes de partículas

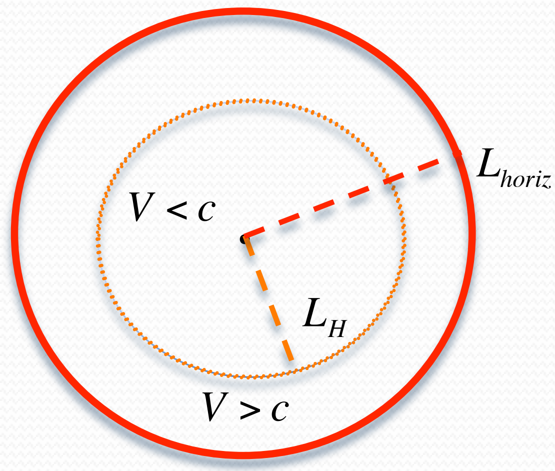
MODELO DE UNIVERSO $a(t) \sim t^n$

$$L_0(z) = \frac{L_{H_0}}{q}[1-(1+z)^{-q}]$$

Si q>o $z \to \infty$

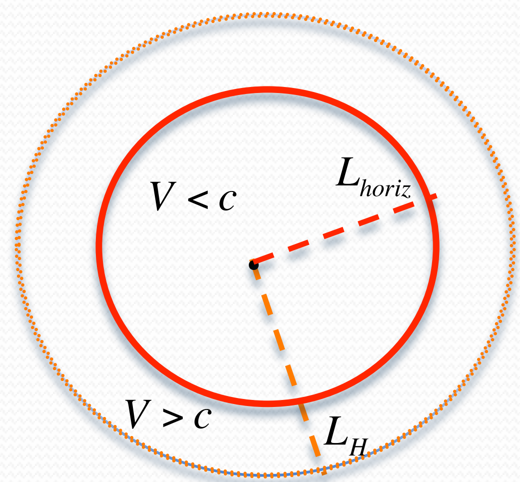
$$\boxed{L_{horiz} = \frac{L_{H_0}}{q}}$$

$\Downarrow$



$$Si \quad q \in (0,1) \;\Rightarrow\; L_H < L_{horiz}$$

Galaxias a la velocidad de la luz, z finito



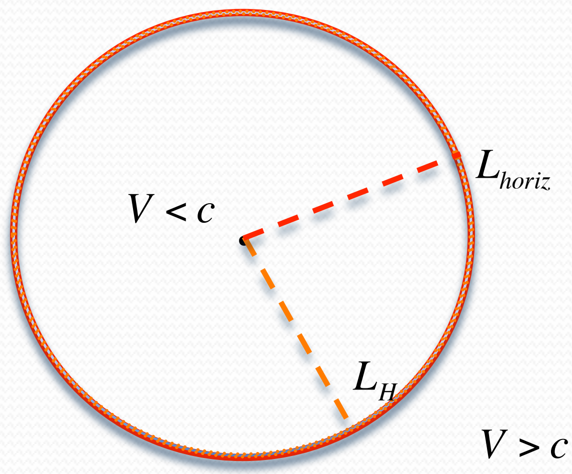
$$Si \quad q > 1 \;\Rightarrow\; L_H > L_{horiz}$$

Galaxias con z infinito tienen velocidades menores a c

MODELO DE UNIVERSO $a(t) \sim t^n$

$$Si \quad q > 0 \quad \Rightarrow \quad L_{H_0} = qL_{horiz}$$

$$Si \quad q = 1 \quad \Rightarrow \quad L_H = L_{horiz}$$



Galaxias a la velocidad de la luz, tienen z infinito

Si q < 0 no hay horizonte!!

$$L_0(z) = \frac{L_{H_0}}{q}[1-(1+z)^{-q}]$$

$$L_0(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

MODELO DE UNIVERSO $a(t) \sim t^n$

Distancia de emisión ("cono de luz")

$$L(z) = \frac{L_0(z)}{1+z} \qquad L_0(z) = \frac{L_{H_0}}{q}[1-(1+z)^{-q}]$$

$$\boxed{L(z) = \frac{L_{H_0}}{q}[\frac{1}{1+z} - (1+z)^{-1-q}]}$$

$$L = 0 \quad si \quad z = 0 \quad y \quad z = \infty$$

$$\frac{dL(z)}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{z_{\max} = (1+q)^{1/q} - 1}$$

Casos particulares

$$q = 1/2 \rightarrow z_{\max} = 5/4$$

$$q = 1 \rightarrow z_{\max} = 1$$

$$q = 0 \rightarrow z_{\max} = e - 1$$

Puede verse que $L_{\max}(z_{\max}) = L_{H_0}[(1+q)^{-1-1/q}]$