

FAMILIAS DE SOLUCIONES EXACTAS  
NO LOCALES DE LAS ECUACIONES  
DE EINSTEIN

*Héctor Hernández*

*Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

# INTRODUCCIÓN

La relación curvatura del espacio-tiempo y materia se encuentra contenida en las famosas ecuaciones de Einstein:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 8\pi T_{ab} . \quad (1)$$

- Desde un punto de vista puramente matemático el problema se reduce a encontrar el mayor número de soluciones exactas posibles.
- Las soluciones exactas establecen un camino para entender y descubrir fenómenos relativistas, son una base conveniente para desarrollar métodos perturbativos. También son una buena referencia para la verificación de soluciones numéricas.

$$\text{EE} \Rightarrow G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

- Las EE constituyen un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, no lineal, para las componentes del tensor métrico.
- Como  $T_{ab}$  y  $G_{ab}$  son tensores simétricos, el sistema de ecuaciones queda conformado por diez ecuaciones.
- A partir de una propiedad del tensor de Einstein, conocida como la identidad de Bianchi,  $G^{ab}{}_{;b} = 0$ , el sistema se reduce a un sistema de seis ecuaciones.
- Al suponer, por ejemplo, simetría esférica el sistema se puede reducir a cuatro ecuaciones

Para un espacio-tiempo esféricamente simétrico se puede definir:

$$ds^2 = e^{2\nu(t,r)} dt^2 - e^{2\lambda(t,r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2)$$

y las cuatro ecuaciones de Einstein que resultan a partir de (2) son:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[ 2\lambda' - \frac{1}{r} \right] = 8\pi T_0^0,$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[ 2\nu' + \frac{1}{r} \right] = 8\pi T_1^1, \quad \frac{2\dot{\lambda}}{r} = 8\pi T_{01},$$

$$e^{-2\nu} \left[ \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} \right] + e^{-2\lambda} \left[ \frac{\lambda' - \nu'}{r} - \nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 \right] = 8\pi T_2^2.$$

Del cálculo de  $T^{1b}_{;b} = 0$  se obtiene la ecuación:

$$\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} = 4\pi r e^{2\nu} \left[ - (T_1^1)' + (T_0^0 - T_1^1) \nu' + \frac{2}{r} (T_2^2 - T_1^1) \right] \quad (3)$$

Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para el caso estático.

Los procedimientos más utilizados para encontrar soluciones exactas de las EE consiste en:

- postular un tensor de materia, casi siempre en la forma de fluido perfecto
- utilizar un sistema de coordenadas apropiado para integrar las EE
- suponer alguna consideración simplificadora o *ansatz* para la integración
- utilizar alguna ecuación de estado para el medio material y resolver TOV
- establecer condiciones simplificadoras sobre las cantidades cinemáticas: tensor de deformación (*shear*) igual a cero...

## Un ejemplo: caso estático y fluido perfecto

Las EE llevan a la conocida Condición de Fluido Perfecto:

$$P(r) = P_{\perp}(r) \quad \Rightarrow \quad \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \frac{\lambda' + \nu'}{r} + \frac{e^{2\lambda} - 1}{r^2} = 0. \quad (4)$$

Si se supone el siguiente *ansatz* para el elemento métrico  $\nu(r)$ :

$$e^{2\nu} = a + br^2,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. La condición (4) se puede integrar para obtener de manera inmediata que

$$e^{2\lambda} = \frac{a + 2br^2}{(1 - 2Cr^2)(a + br^2)} \quad \Rightarrow \quad m(r) = \frac{r}{2} [1 - e^{-2\lambda}],$$

con  $C$  como una constante de integración.

Una vez que las dos funciones métricas están determinadas, las variables  $\rho(r)$  y  $P(r)$  se obtienen vía las ecuaciones de campo:

$$\rho(r) = \frac{2r^2 (1 + 6Cr^2) b^2 + (3 + 14Cr^2) ab + 6Ca^2}{8\pi (2br^2 + a)^2},$$
$$P(r) = \frac{(1 + 6Cr^2) b + 2Ca}{8\pi (2br^2 + a)}.$$

Las constantes se pueden calcular ya que estas se deben satisfacer un par de condiciones de contorno en la superficie de la esfera donde  $r = R$ .

Estas condiciones son:  $m(R) = M$  y  $P(R) = 0$ .

Además, se tiene la siguiente información adicional para el obtener el resto de constantes:

$$\rho_c = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \frac{3(b + 2Ca)}{8\pi a},$$
$$P_c = \lim_{r \rightarrow 0} P(r) = \frac{b - 2Ca}{8\pi a}.$$

La suposición utilizada aquí tiene la gran ventaja de que no es necesario integrar la ecuación de equilibrio hidrostático (TOV) para buscar el valor del radio donde la presión se hace cero.

Con el ansatz propuesto se obtienen directamente las variables físicas  $\rho$  y  $P$ .

Esta solución no es más que la bien conocida Solución IV obtenida por R.C. Tolman.



$e^{2\nu}$	$ar^b$	Tolman (1939), Kuchowicz (1968c)
	$1 + a/r$	Kuchowicz (1968a)
	$a + br^2$	Tolman (1939), Kuchowicz (1968b)
	$a(r + b)^2$	Kuchowicz (1967, 1968c)
	$(a + br^n)^2, n = 3, \pm 1, -2$	Heintzmann (1969)
	$a(1 + br^2)^n$	Heintzmann (1969), Korkina (1981)
		Durgapal (1982)
		Durgapal <i>et al.</i> (1984)
	$(1 + br^{2n})^m$	Paklin (1994)
	$(ar^{1-\alpha} - br^{1+\alpha})^2$	Tolman (1939), Wyman (1949)
		Kuchowicz (1968b)
	$(c_1 r^{2(a+b)} + c_2 r^{2(a-b)})^\alpha,$ with restr. on $a, b, \alpha$	Kuchowicz (1970), Leibovitz (1969)
		Pant and Sah (1982), Pant (1994)
	$\left( \frac{a + (3k^2 + 2k - 1)r^2}{a + (3k^2 - 2k - 1)r^2} \right)^k$	Orlyanski (1997)
	$a(5 + br^2)^2(2 - br^2)$	Heintzmann (1969)
	$r^2(a + b \ln r)^2$	Kuchowicz (1968b)
	$ae^{br^2}$	Kuchowicz (1968b), Leibovitz (1969)

$e^{-2\lambda}$	$a$	Tolman (1939), Kuchowicz (1968b)
	$ar^2$	Patwardhan and Vaidya (1943)
	$ar^b$	Kuchowicz (1968b, 1971b)
	$a + br$	Kuchowicz (1968c)
	$a + br^2$	Kuchowicz (1968b)
		Buchdahl and Land (1968)
	$a - 2r^{-2}$	Bayin (1978)
	$a + br^\alpha$	Tolman (1939), Wyman (1949)
	with restr. on $a, b, \alpha$	Kuchowicz (1968a, 1968b)
	$1 + ar^2 + br^4$	Tolman (1939), Mehra (1966)
		Patwardhan and Vaidya (1943)
	$(1 + ar^2)/(1 + cr^2)$	Buchdahl (1959, 1984)
	$1 - \frac{8ar^2(3 + ar^2)}{7(1 + ar^2)}$	Durgapal and Fuloria (1985)
	$a - 2 \ln r$	Kuchowicz (1968b)

# A Review of the Relativistic Static Fluid Sphere

Michael R. Finch<sup>1</sup>  
School of Mathematical & Physical Sciences  
University of Sussex  
Falmer  
BRIGHTON

James E. F. Skea  
School of Mathematical Sciences  
Queen Mary College  
Mile End Road  
LONDON E1 4NS  
United Kingdom.

May 20, 1998

- (i) The solution should be physically and geometrically regular in the sense of §??, ie the solution should match to the Schwarzschild exterior solution, it should be possible to construct a locally Lorentzian frame everywhere, and  $\rho_0$  and  $p_0$  should be finite.
- (ii) The solution should be physically *realistic*, in the sense of (??)–(??), (??) and (??) being fulfilled up to the sphere's boundary.
- (iii) The solution should have a minimum amount of flexibility. In practice, a solution will satisfy this criterion if it has at least two free constants (ie, is at least two-parameter) after all regularity conditions have been satisfied.
- (iv) The solution should be realistic in a range of parameters which typify an astrophysical situation. In practice, this will be taken to mean a neutron star.

There are only eight solutions (or classes of solutions) which satisfy our criteria for an interesting solution. They are: Tolman IV (??); Wyman's oft-rediscovered solution (??); Buchdahl's solution of 1959 (??), subsequently studied by Durgapal and Bannerji [22]; Buchdahl's solution of 1967 (??); Heintzmann's regular solution (4.96); Glass and Goldman's solution (4.144) and the solution of Finch and Skea (4.169).

## Caso estático y con simetría esférica

Métrica

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5)$$

donde  $\nu = \nu(r)$  y  $\lambda = \lambda(r)$ . Si utilizamos el hecho de que

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}$$

de la condición  $P = P_{\perp}$  se obtiene una expresión que contiene a las funciones  $m(r)$ ,  $\nu(r)$  y derivadas hasta orden 2 de  $\nu(r)$ :

$$r^2 (r - 2m) [\nu'' - (\nu')^2] - r\nu' [r - 3m + rm'] - rm' + 3m = 0 \quad (6)$$

De esta ecuación diferencial se puede apreciar que conociendo  $\nu(r)$  resulta una ecuación lineal de primer orden para  $m(r)$ .

Es posible construir un algoritmo (Lake 2003) para obtener familias de soluciones de las EE para el caso de fluido perfecto.

Dada la función  $\nu(r)$ , entonces se puede integrar (6) para  $m(r)$ :

$$m(r) = \frac{\int b(r) c(r) dr + \mathcal{C}}{c(r)} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{C}$  es una constante y:

$$a(r) \equiv \frac{2r^2 [\nu'' + (\nu')^2] - 3r\nu' - 3}{r [r\nu' + 1]}$$

$$b(r) \equiv \frac{r [r (\nu'' + (\nu')^2)] - \nu'}{r\nu' + 1}$$

$$c(r) \equiv e^{\int a(r) dr}$$

- La función  $\nu(r)$  no es del todo arbitraria, debe cumplir con una serie de requisitos que eviten singularidades en los invariantes obtenidos a partir del tensor de Riemann
- Para un fluido perfecto, estático y con simetría esférica, el hecho de que la densidad central  $\rho_c$  y la presión central  $P_c$  sean finitas, garantiza que todas las cantidades invariantes del tensor de Riemann sean regulares en el centro de simetría
- La función  $\nu(r)$  debe ser una función monótona creciente con un mínimo regular en  $r = 0$  y además  $\nu(0) = 0$ ,  $\nu'(0) = 0$ ,  $\nu''(0) = \propto (3P_c + \rho_c) > 0$
- Para que el espacio-tiempo represente una superficie regular en la superficie al acoplarse con el espacio-tiempo de Schwarzschild, donde  $m(r_s) = M$ , se debe cumplir:  

$$\nu'(r_s) = M/(r_s(r_s - 2M)).$$

La función “semilla”  $\nu(r)$  permite obtener una solución exacta de las EE regular en el centro (fluido perfecto).

En Lake (2003) se propone un ejemplo para  $\nu(r)$ , claramente inspirado en el ansatz utilizado por Tolman

$$\nu(r) = \frac{1}{2}N \ln \left( 1 + \frac{r^2}{\alpha} \right), \quad N \geq 1 \quad (8)$$

donde  $N$  es un entero y  $\alpha$  una constante positiva.

Es interesante ver que la familia de funciones (8) representan soluciones completamente distintas para los diferentes valores de  $N$ :

$N = 1$ : Del tipo Tolman IV con  $a = 1$  y  $b = 1/\alpha$

$N = 2$ : Solución donde  $m = Cr^3/(3r^2 + \alpha)^{2/3}$

$N = 3$ : Heint IIa (Heint 1969)

$N = 4$ : Durg IV (Durgapal 1982)

$N = 5$ : Durg V (Durgapal 1982)



## Familias de soluciones exactas con una EENL

Queremos explorar la factibilidad de la utilizar una ecuación de estado no local para obtener familias de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, para una distribución acotada de materia, anisótropa y con simetría esférica.

El método consiste en suministrar *ad hoc* una ecuación de estado algebraica que presupone una relación simple entre las variables macroscópicas, como la densidad y presión y utilizar el algoritmo de Lake visto anteriormente.

$$P = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \rho \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (9)$$

La ecuación (9) se puede reescribir como una ecuación diferencial:

$$\rho - 3P + r(\rho' - P') = 0. \quad (10)$$

Utilizando las ecuaciones de campo esta última queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_0^0 + 3\mathbf{T}_1^1 + r(\mathbf{T}_0^0 + \mathbf{T}_1^1)' = 0$$

ecuación que se puede escribir, vía a las ecuaciones de Einstein:

$$\mathbf{G}_0^0 + 3\mathbf{G}_1^1 + r(\mathbf{G}_0^0 + \mathbf{G}_1^1)' = 0 \quad (11)$$

Al introducir el elemento métrico (2) en (11) se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$2(\lambda' - \nu') + r(2\lambda'\nu' - 2(\lambda')^2 + \lambda'' - \nu'') = 0, \quad (12)$$

que puede integrarse formalmente para dar

$$\nu(r) = \lambda(r) + \kappa, \quad (13)$$

La constante  $\kappa$  se encuentra íntimamente ligada al potencial gravitacional en la superficie:

$$e^{\kappa} = 1 - \frac{2M}{R}. \quad (14)$$

Otra característica importante es que los modelos con una **EENL** son de naturaleza anisótropa en la presión, es decir,  $P_{\perp} \neq P$ .

Es bueno acotar que en el centro de simetría se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{2\lambda} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} e^{2\nu} = e^{2\kappa}. \quad (15)$$

Es fácil ver que en  $r = 0$  resulta la siguiente relación entre la densidad central y la presión central.

$$\rho_c = 3P_c. \quad (16)$$

Por lo tanto, el elemento métrico resulta ahora de la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2\lambda} e^{2\kappa} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) , \quad (17)$$

Las ecuaciones de Einstein que se deducen a partir de (17) son

$$\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda')}{8\pi r^2} , \quad (18)$$

$$P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2} , \quad (19)$$

$$P_{\perp} = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi} . \quad (20)$$

Con (18) y (19) la función masa es

$$m(r) = 2\pi r^3 (\rho - P) . \quad (21)$$

## Algoritmo para obtener familias de soluciones no locales

A partir del método propuesto por Lake (Lake2003) para generar familias de soluciones exactas, estáticas e isótropas de las ecuaciones de Einstein se puede desarrollar un procedimiento similar para el caso de ecuaciones de estado no locales, anisótropas:

- Suministrar una función métrica  $\nu(r)$  de la forma

$$\nu(r) = N\Phi(r), \quad N \geq 1 \quad (22)$$

donde  $N$  es un entero,  $\Phi(r)$  una función que debe ser monótona creciente con un mínimo regular en  $r = 0$ .

- La otra función métrica queda entonces completamente determinada:

$$\lambda(r) = \nu(r) - \kappa \quad (23)$$

- Y de las ecuaciones de Einstein (18) - (20) se obtienen

$$\rho = \frac{1 - e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda')}{8\pi r^2}, \quad P = \rho - \frac{1 - e^{-2\lambda}}{4\pi r^2}, \quad P_{\perp} = \frac{\lambda'' e^{-2\lambda}}{8\pi}$$

Para que  $P(R) = 0$  se debe satisfacer la siguiente ecuación para  $\lambda_R = \lambda(R)$

$$2R\lambda'_R + 1 = e^{2\lambda_R} \quad (24)$$

La viabilidad del algoritmo anteriormente expuesto puede ser estudiado con los ejemplos que se muestran a continuación.

## 1.- Familias de soluciones del tipo Tolman IV

Consideremos un caso más general que el propuesto en Lake-2003:

$$\nu(r) = \frac{1}{2}N \ln \left( a + \frac{r^2}{b} \right), \quad N \geq 1 \quad (25)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes.

Las ecuaciones (18) - (20) resultan en

$$8\pi r^2 \rho(r) = \frac{(ab + r^2)^{(N+1)} - ab^{(N+1)}e^{2\kappa} + b^N e^{2\kappa} (2N - 1)r^2}{(ab + r^2)^{(N+1)}}$$

$$8\pi r^2 P(r) = - \frac{(ab + r^2)^{(N+1)} - ab^{(N+1)}e^{2\kappa} - b^N e^{2\kappa} (2N + 1)r^2}{(ab + r^2)^{(N+1)}}$$

$$8\pi P_{\perp}(r) = \frac{Nb^N (ab - r^2) e^{2\kappa}}{(ab + r^2)^{(N+2)}}$$

La función masa

$$m(r) = \frac{r}{2} \left[ 1 - \frac{b^N e^{2\kappa}}{(ab + r^2)^N} \right] \quad (26)$$

Para que la funciones  $\rho$  y  $P$  no sean singulares en  $r = 0$ , se tiene que cumplir que

$$a = [e^{2\kappa}]^{\frac{1}{N}} \quad (27)$$

La condición  $P(R) = 0$  implica la siguiente ecuación para  $b$

$$b^N e^{2\kappa} [ab + R^2(2N + 1)] - (ab + R^2)^{(N+1)} = 0 \quad (28)$$

Otra manera de ver la regularidad en el centro es calculando la densidad central:

$$\rho_c = \frac{3Ne^{2\kappa}}{8\pi b e^{\frac{2(N+1)}{N}\kappa}} \Rightarrow M = \frac{R}{2} \left[ 1 - \left( \frac{3N}{3N + 8\pi R^2 \rho_c} \right)^N \right]$$



Tenemos ahora varios casos para los diferentes valores de  $N$ :

**N= 1**

$$a = e^{2\kappa}, \quad b = \frac{R^2}{e^{2\kappa}}$$

**N=2**

$$a = e^{\kappa}, \quad b = \frac{(3 + \sqrt{17}) R^2}{4e^{\kappa}}$$

**N= 3**

$$a = e^{2\kappa/3},$$
$$b = \frac{R^2 \left( [2(49 + \sqrt{353})]^{2/3} + [64(49 + \sqrt{353})]^{1/3} + \sqrt[3]{8192} \right)}{6e^{2\kappa/3} (49 + \sqrt{353})^{1/3}}$$

Para  $N > 3$  los cálculos van a depender de la capacidad que se tenga para resolver analíticamente la ecuación (28). En todo caso, siempre es posible buscar una solución numérica.

- A pesar de que  $N = 1$  corresponde a una solución tipo Tolman IV, en este caso, lo que se obtiene es una solución anisótropa y no local.
- Las ecuaciones de estado que resultan para valores de  $N > 1$  son ecuaciones de estado con propiedades completamente diferentes.

Para un objeto compacto de radio  $R = 10$  Km

	$\mu$	$M(M_{\odot})$	$\rho_R \times 10^{14}$ (*)	$\rho_c \times 10^{15}$ (*)	$v_{s\perp}^2 _c$
$N = 1$	0.25	1.69	5.36	1.61	4/5
$N = 2$	0.29	2.00	6.32	1.81	2/3
$N = 3$	0.31	2.12	6.72	1.87	3/5
$N = 4$	0.32	2.19	6.94	1.91	14/25

[\* In  $\text{gr.cm}^{-3}$ ] y  $\mu$  es la relación Masa-Radio. La velocidad del sonido al cuadrado en el centro:

$$v_s^2|_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{3}{5}$$

## 2.- Familias de soluciones conformemente planas

Para simetría esférica, se puede demostrar que la única componente diferente de cero del tensor de Weyl es:

$$W \equiv \frac{3}{r^2} C_{\theta\phi\theta}^{\phi} = \left[ \nu' \lambda' - \nu'' - \nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] e^{-2\lambda} + \frac{1}{r^2} \quad (29)$$

- Caso 1:  $W = 0$  [Stewart 1982]

$$e^{2\nu(r)} = e^{2\Phi} (a + br^2 e^{-2\Phi})^2, \quad (30)$$

donde

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} Kr \cot\left(\frac{Kr}{2}\right) + C,$$

- Caso 2: Imponer ( $W = 0$ ) + ( $\nu = \lambda + \kappa$ ) para cerrar el sistema

$$\lambda'' + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{2\lambda}}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(r) = N \ln \left[ \frac{Kre^{\kappa}}{\text{sen}(Kr)} \right]$$

A continuación valores numéricos para un objeto de  $R = 10$  Km:

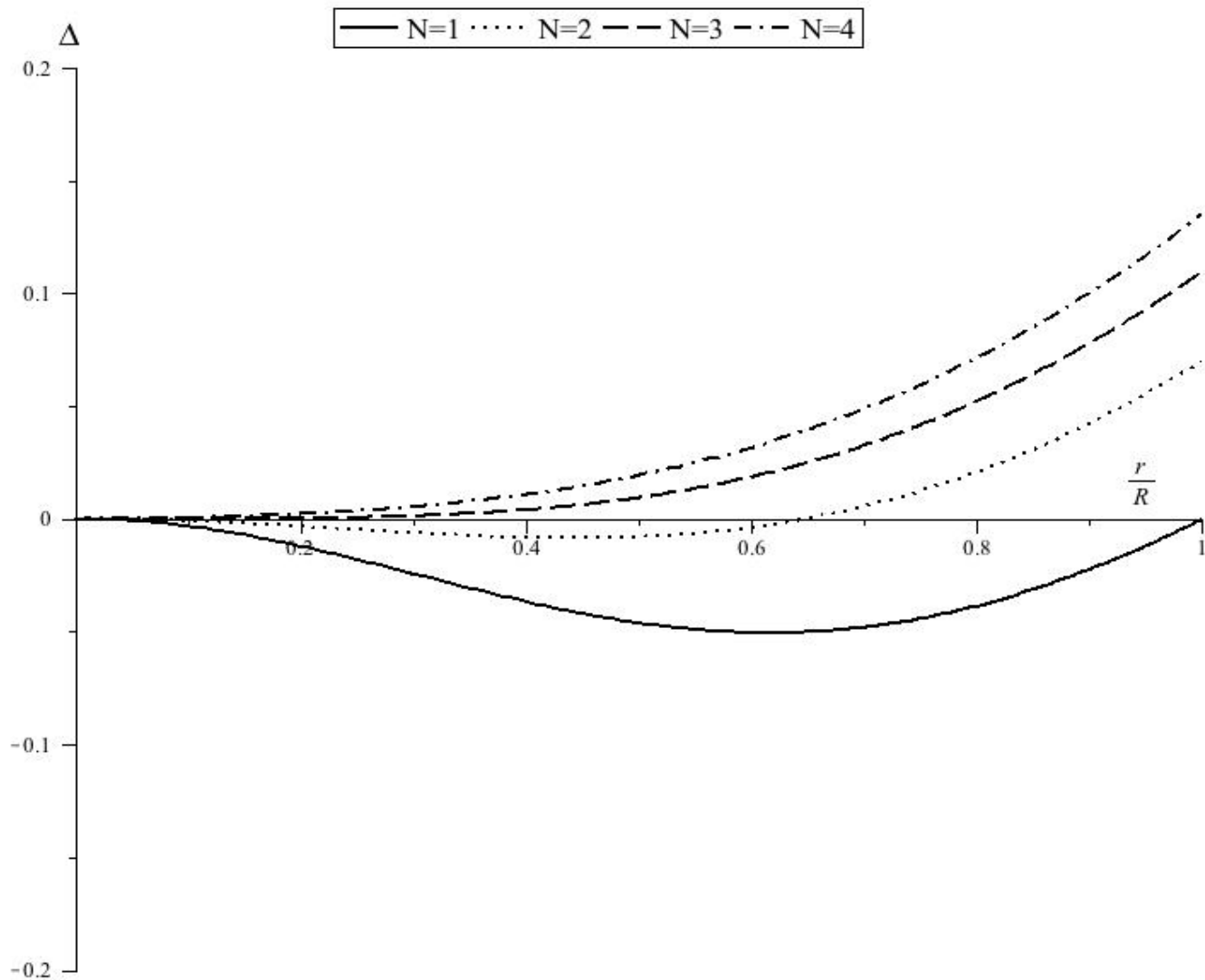
Caso 1	$\mu$	$M(M_{\odot})$	$\rho_R \times 10^{14} (*)$	$\rho_c \times 10^{15} (*)$	$v_{s\perp}^2 _c$
$N = 1$	0.30	2.00	6.33	1.81	0.67
$N = 2$	0.32	2.19	6.94	1.91	0.56
$N = 3$	0.33	2.27	7.17	1.95	0,51
$N = 4$	0.34	2.30	7.29	1.97	0.49

Caso 2	$\mu$	$M(M_{\odot})$	$\rho_R \times 10^{14} (*)$	$\rho_c \times 10^{15} (*)$	$v_{s\perp}^2 _c$
$N = 1$	0.396	2.68	8.49	2.14	0.20
$N = 2$	0.374	2.54	8.03	2.07	0.31
$N = 3$	0.368	2.49	7.90	2.05	0.34
$N = 4$	0.366	2.48	7.84	2.04	0.36

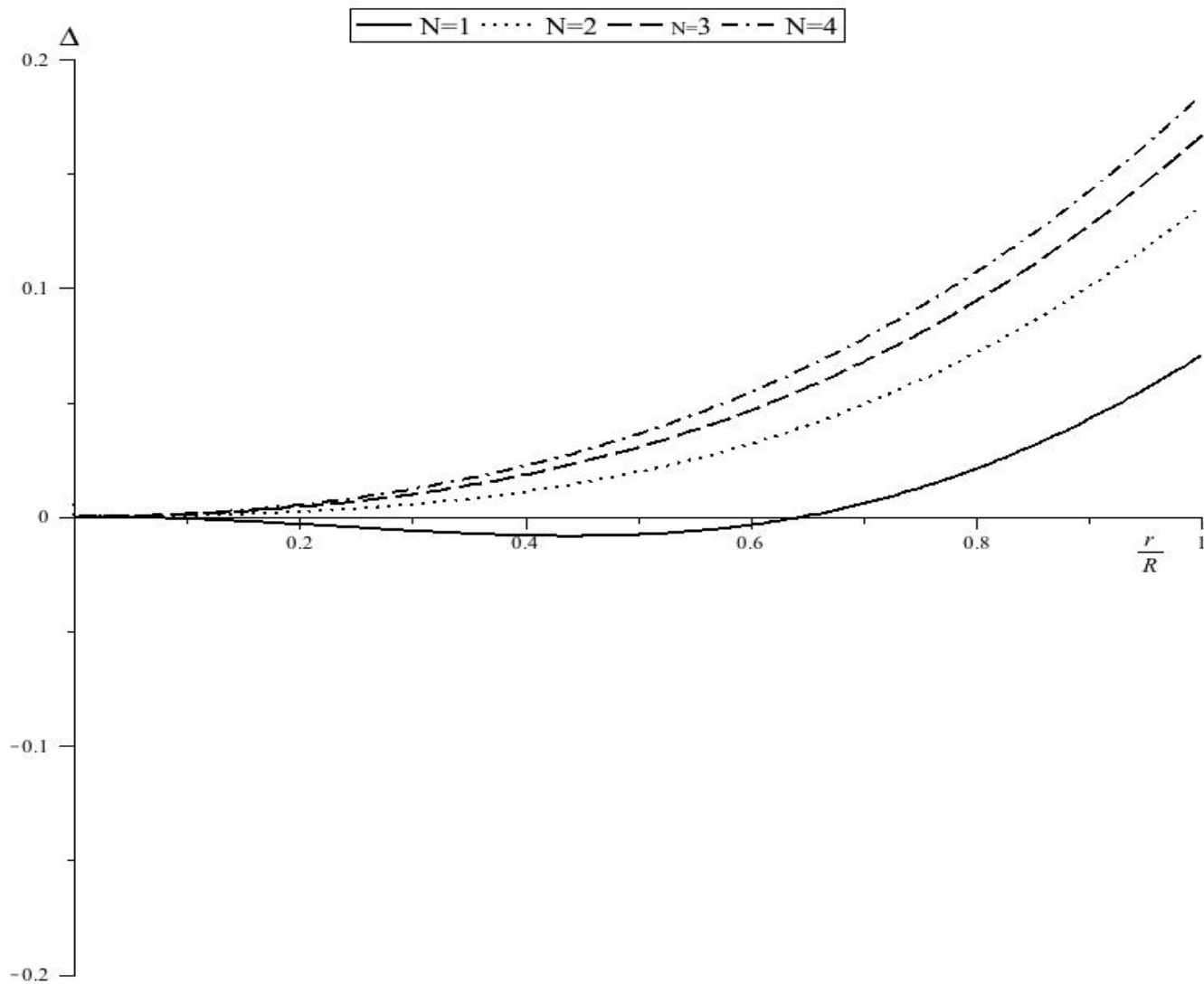
[\* In  $\text{gr.cm}^{-3}$ ]

## CONCLUSIONES

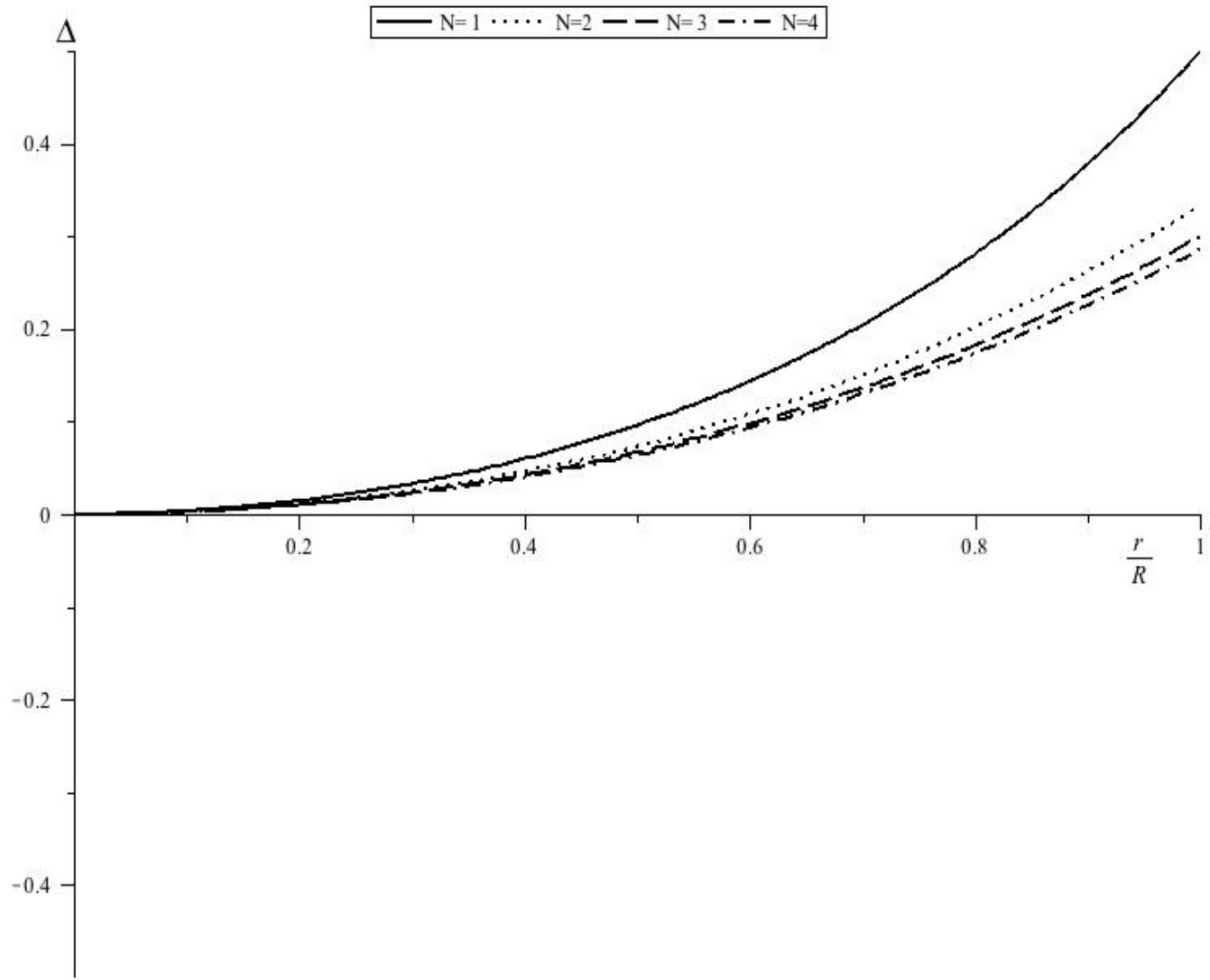
- Consideramos el algoritmo propuesto por Lake (Lake2003), para generar un conjunto de soluciones regulares, estáticas, con simetría esférica y de fluido perfecto de las ecuaciones de Einstein.
- Basado en la posibilidad de escoger una de las funciones métricas resultó posible generar soluciones no locales para fluidos no perfectos.
- El número de funciones fuente puede ser infinito, con lo cual el número de soluciones generadas podría ser infinito, pero esto no garantiza que la condición de borde  $P(R) = 0$  lleve a una ecuación que pueda resolverse de manera exacta. Sin embargo, es bueno acotar que el conjunto de soluciones obtenidas bajo este criterio resultan ser físicamente interesantes.
- El método de Lake fue adaptado aquí de manera satisfactoria para generar conjuntos de soluciones no locales físicamente aceptables.



$\Delta = \frac{P_{\perp} - P}{\rho}$  para diferentes valores de  $N$  Tolman IV-Like

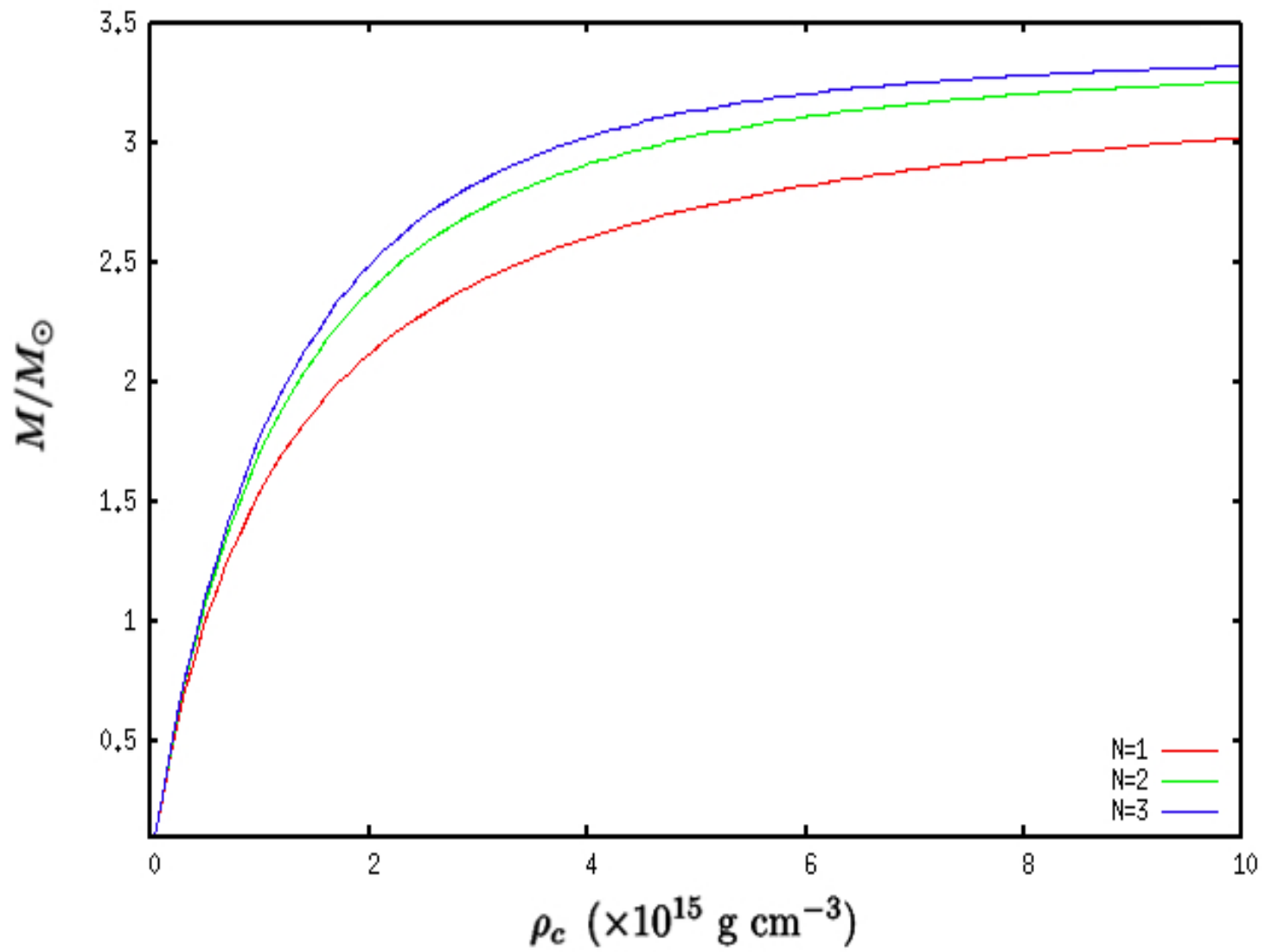


$$\Delta = \frac{P_{\perp} - P}{\rho} \text{ para diferentes valores de } N \text{ Caso 1}$$



$$\Delta = \frac{P_{\perp} - P}{\rho}$$
 para diferentes valores de  $N$  Caso 2





¡Gracias por la atención prestada!